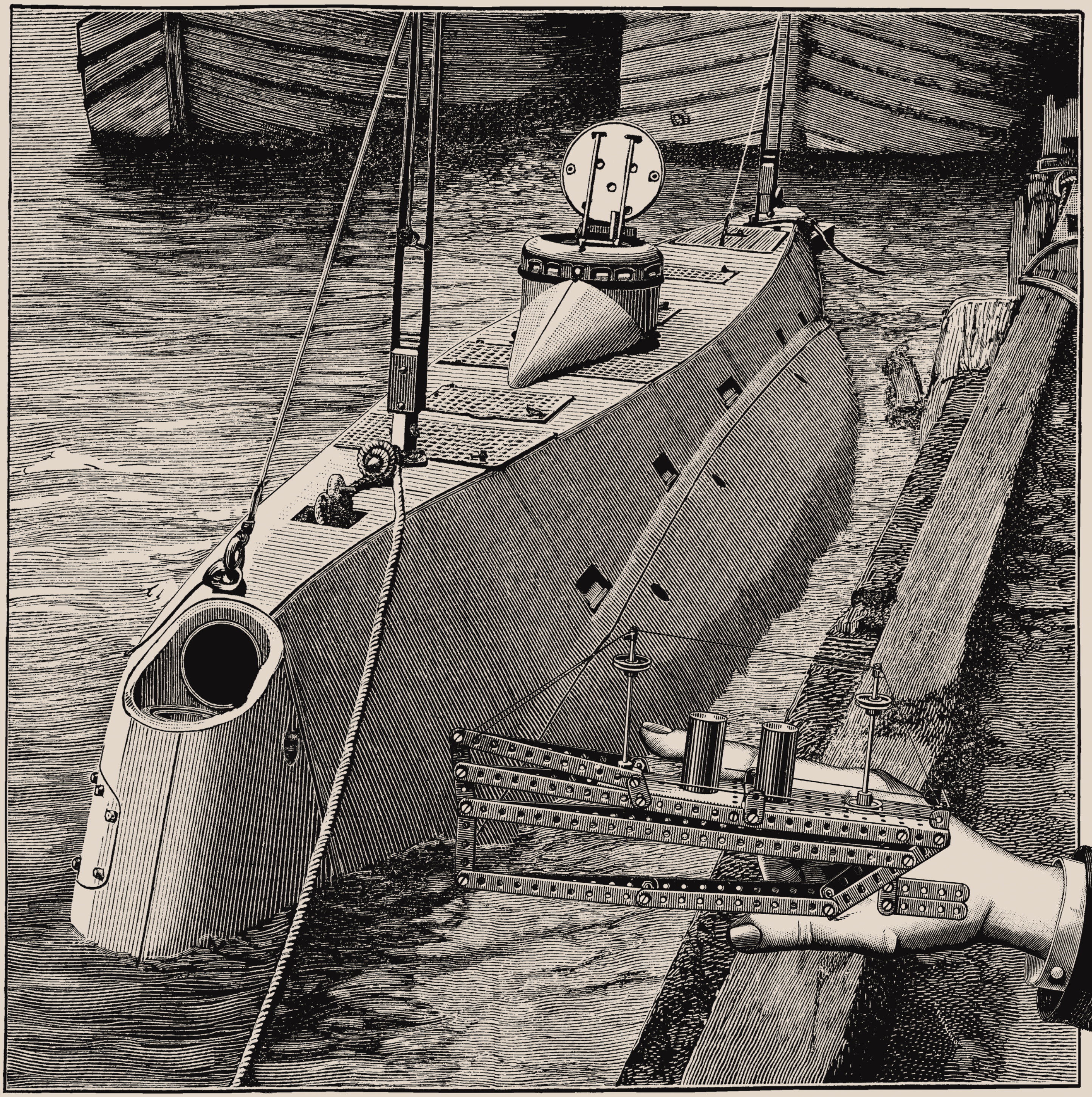
ISSN 0130-2221
МАЙ/ИЮНЬ
2013 • №3

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



# ВОСЕМЬ В ОДНОЙ

На фотографии перед вами головоломка из восьми деталей, каждая из которых состоит из пяти одинаковых кубиков. Ее автор – *Донгун Пи* (Donghoon Pee) из Республики Корея. Заданий в этой головоломке столько же, сколько деталей: требуется сложить увеличенные в два раза копии каждой из них. Во всех случаях для этого вам придется использовать все детали набора.
Желаем успеха!

*Е. Епифанов*

# КВАНТ

МАЙ ИЮНЬ 2013 №3

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА




## В номере:

В августе нынешнего года исполняется 150 лет со дня рождения Алексея Николаевича Крылова (1863–1945) – выдающегося ученого-энциклопедиста, кораблестроителя, механика, математика и инженера, академика. Всю жизнь Крылов строил корабли и учил строить корабли – а для этого нужны знания из самых разных теоретических и практических областей. Алексей Николаевич знал о кораблях, по-видимому, все – от необходимых при строительстве судна слесарных инструментов до сложнейших физических и математических теорий, связанных со всеми сторонами мореходного дела. Он автор фундаментальной «Теории качки корабля», изобретатель множества полезных приборов (в том числе механического прибора для интегрирования дифференциальных уравнений), не говоря уже о множестве научных работ и учебных пособий по механике, математике и уравнениям математической физики. Есть у него и труды по астрономии, и труды по практической оптике.

Алексей Николаевич оставил воспоминания о своей жизни – а жизнь он прожил долгую, яркую и интересную. Воспоминания превосходно написаны, мы всем советуем найти их и прочитать. Но, надо сказать, и научные работы, и докладные записки по морскому министерству он тоже умел писать ясно, образно и доходчиво.

Предлагаем вашему вниманию три небольшие статьи А.Н.Крылова, вошедшие в книгу «Академик А.Н.Крылов. Воспоминания и очерки» (М.: Издательство АН СССР, 1956).

# Значение математики для кораблестроителя

**А.КРЫЛОВ**

**§ 1.** ОБЫЧНО СЧИТАЮТ, ЧТО МАТЕМАТИКА СЛУжит основою образования инженера и что всякий инженер должен знать математику.

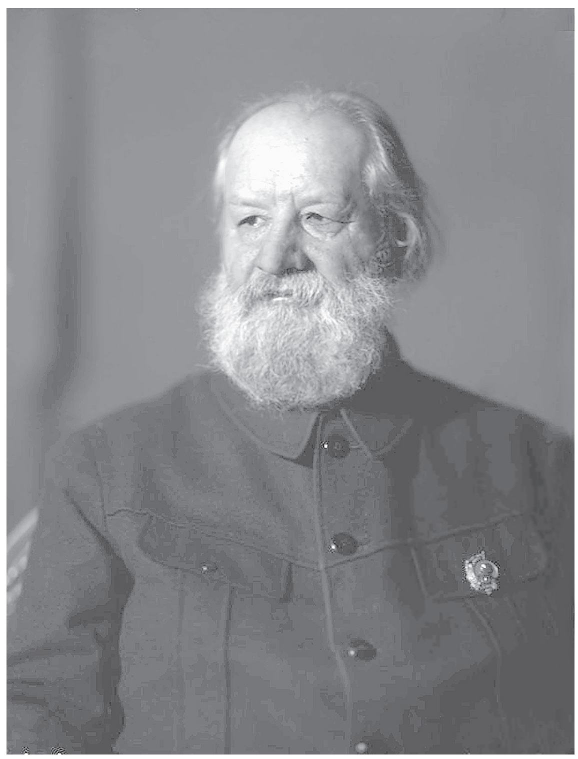
Настоящий очерк посвящен рассмотрению вопроса о том, в какой мере такой взгляд правилен или неправилен, а вместе с тем и вопросу о том, *кого* и *как* учить математике.

Математика в современном своем состоянии настолько обширна и разнообразна, что можно смело сказать, что в полном объеме она уму человеческому непостижима, а следовательно, должен быть сделан строгий выбор того, что из математики нужно знать и зачем нужно знать инженеру данной специальности.

В этом выборе нам может помочь и самое общее обозрение исторического хода развития математики и практических ее приложений.

**§ 2.** Европейские народы унаследовали свою культуру от древних греков, населявших побережье восточной части Средиземного моря, главным образом теперешнюю Грецию.

Здесь, в особенности в Афинах, за 400 лет до нашей эры уже была популярна философия и как одна из ее отраслей – логика, т. е. искусство делать правильные умозаключения из данных предпосылок. При знаменитых Платоне и Аристотеле образцовым примером логики служила *геометрия*, не в смысле промышленного землемерия и определения границ земельных участков, а как чисто отвлеченная наука, изучавшая идеальные образы, ею самою созданные, по свойствам своим соответствующие реальным, имеющимся в природе.



*Алексей Николаевич Крылов*

Это изучение основывалось на небольшом числе аксиом, определений и на трех постулатах. Я не буду перечислять этих аксиом, вам известных, а приведу лишь постулаты, о которых в современных руководствах по геометрии часто не упоминается совсем. Вот они.

1) Через две данные точки можно провести прямую и притом только одну.

2) Ограниченная прямая линия может быть продолжена прямою же на любую длину.

3) Когда дан радиус, один конец которого находится в данной точке, то этим радиусом может быть описан круг.

Затем все учение, составляющее, по теперешней терминологии, элементарную геометрию, приводится, сводя все доказательства чисто логическими рассуждениями к аксиомам и все построения к сказанным постулатам.

Таким образом, возникла та геометрия, которая с неподражаемым совершенством изложена примерно за 250 лет до н.э. Евклидом.

Само собой разумеется, что в то время геометрию изучали взрослые юноши, а вернее, в часы досуга зрелые бородатые мужи, искушенные в словопрениях перед судилищами и ареопагами, ибо лишь они могли оценить всю тонкость логики Евклида; теперь же в Англии в буквальных переводах мучают 12- и 13-летних мальчиков, и можно лишь удивляться, как общество «Защиты детей от жестокого обращения и покровительства животным» это допускает.

Попробуйте взять Евклида в переводе и посмотрите, какое умственное напряжение требуется, чтобы проследить ход его доказательств, но зато какова изумительная логичность и строгость их и какова их последовательность. Конечно, это изучение представляет, может быть, и превосходную умственную тренировку, но во всякой тренировке надо соблюдать должную меру.

В школе же Платона зародилось и учение о конических сечениях (по поводу знаменитой задачи об удвоении куба), которое впоследствии, также за 250 лет до н.э., было доведено Аполлонием до такой степени полноты и совершенства, что хотя вас и мучили в курсе аналитической геометрии изучением свойств этих кривых, но это составляет лишь малую долю того, что находится в сочинении Аполлония и что им самим создано. Если к этому присоединить еще сочинения Архимеда, величайшего из математиков всех времен и народов, то вы получите некоторое суждение о том, каков был гений древних греков.

Само собой разумеется, что все в этих сочинениях излагается чисто геометрически с полною «евклидовой» строгостью рассуждений, не прибегая к той алгебраической символистике, к которой мы так привыкли теперь.

Хотя от древних остались гигантские по размерам и изумительные по красоте и пропорциональности здания и сооружения, но совершенно не известно, каким образом они разрабатывали проекты этих сооружений и оказывала ли им в этом помощь геометрия. Многое заставляет думать, что эта помощь была ничтожна.

**§ 3.** С завоеванием древнего мира римлянами отвлеченная, чисто логическая наука греков постепенно

*Верфь деревянного судостроения*

приходит в упадок, сменяясь практической архитектурой, гидравликой и землемерием, а в IV и V вв., можно сказать, всякая наука утрачивается и замирает на целое тысячелетие. Но практика и техника как искусство, независимо от утраты отвлеченной науки, продолжают развиваться, и создается как бы разрыв между отвлеченною наукою и практикой.

Мы теперь с понятием о математике связываем понятие о вычислениях в самом общем и обширном значении этого слова. В древности ограничивались лишь производством численных вычислений, причем оно входило главным образом лишь в астрономию, в которой было доведено до значительного совершенства, несмотря на неудобства письменной нумерации древних греков.

С XVI в. в Европе зарождается пришедшее от арабов искусство буквенного исчисления и формальная алгебра, которая, постепенно совершенствуясь, к середине XVII в. достигает значительного развития.

**§ 4.** Здесь приходится упомянуть великого философа и математика Декарта; с одной стороны, он своим афоризмом «Cogito ergo sum» (Мыслю – значит существую) как бы вновь наложил на математику тот отпечаток отвлеченности, который она не только сохранила и доныне, но который особенно усилился за последние 70 лет. С другой стороны, Декарт преобразовал геометрию введением в нее алгебры и ее вычислительных методов, которые были совершенно чужды древним.

В 1670-х годах Ньютон создает «исчисление флюент и флюксий», т.е. текущих количеств, как он его называет. Независимо от него в 1680-х годах это же исчисление находится и опубликовывается философом Лейбницем и называется им «исчисление бесконечно малых».

Ньютон вместе с тем в изданном им в 1686 г. сочинении «Математические начала натуральной философии» развивает и как бы вновь создает динамику, первые начала которой были положены за 50 лет перед тем Галилеем, и доводит эту науку до высокой степени развития чисто геометрическим путем, по образцу древних, и прилагает созданное им учение к установлению системы мира и познанию и приложениям закона тяготения, им открытого, к изучению движения небесных тел.

В течение XVIII в. анализ бесконечно малых доводится до высокой степени совершенства; на его основе развивается теоретическая механика, которая сперва, по примеру Ньютона, прилагается главным образом к изучению движения небесных тел и отчасти к баллистике.

С середины XVIII в. механика начинает прилагаться к решению вопросов технических не только из области статики, которая была создана Архимедом, но и динамики.

С XIX в. технические приложения механики как в области статики, так и динамики все более и более проникают в технику и все более и более ее охватывают.

**§ 5.** Но и математика не стоит на месте, она продолжает развиваться в разных направлениях, которые можно характеризовать так:

а) развитие вычислительных, в обширном смысле этого слова, процессов;

б) изучение свойств функций, возникающих при вычислениях, установление строгости и строгое обоснование самих вычислительных процессов;

в) общее изучение свойств чисел;

г) изучение свойств пространства и обобщение их;

д) изучение специально алгебраических процессов и свойств алгебраических уравнений;

е) усовершенствование способов численных вычислений, приближенных методов их и приложения этих методов.

Каждая из этих областей разрослась так, что литература по каждой из них в отдельности составляет целую библиотеку из многих сотен, многих тысяч, а иногда и многих десятков тысяч журнальных статей, руководств и трактатов.

Теоретическая механика также разрослась не в меньшей степени; в нее входят:

а) чисто теоретическая или так называемая рациональная механика;

б) «небесная механика», т. е. приложение механики к изучению движения небесных тел;

в) так называемая прикладная механика, т.е. приложение механики к вопросам изучения механизмов и построения их;

г) теория упругости и сопротивления материалов, изучающая вместе со «строительной механикой» свойства материалов, расчеты разного рода конструкций и возникающих в них напряжений;

д) наконец, сюда же надо отнести математическую физику с ее подразделениями, каждое из которых имеет обширные приложения в практике и технике.

Литература по каждому из этих отделов громадна и, можно сказать, практически необозрима.

**§ 6.** При нашем беглом обзоре развития математики мы обратили внимание на то, что чистый математик, которого мы будем называть «геометр», требует от своей науки – математики – прежде всего безукоризненной логичности и строгости суждений.

Одно время в конце XVIII в. математика как бы отчасти сбилась с этого пути, но уже в первой четверти XIX в. была на него вновь неуклонно направлена Гауссом, Абелем и Коши; начиная же с последней четверти XIX в., по почину Вейерштрасса, в математику вновь вводится, можно сказать, «евклидова строгость», а с нею отвлеченность.

Математика сама создает те идеальные образы, над которыми она оперирует, не только не прибегая при этом к наглядности, но тщательно изгоняя из своих рассуждений и доказательств всякую наглядность, всякое свидетельство чувств. Геометр не только не верит своим чувствам, но не признает самого их существования; он есть декартово *мыслящее существо*. Геометру нет дела до того, есть ли в природе такие предметы, к которым его образы относятся, для него важно, что он их создал в своем уме, приписал им определения, аксиомы и допущения, после чего он с полною логичностью и строгостью развивает следствия этих аксиом и допущений, не вводя при этом никаких других аксиом и никаких новых допущений, – до остального ему дела нет.

**§ 7.** Ясно, что практик, техник, каковым и должен быть всякий инженер, смотрит на дело совершенно иначе. Он должен развивать не только свой ум, но и свои чувства так, чтобы они его не обманывали; он должен не только уметь смотреть, но и *видеть*, он должен уметь не только слушать, но и *слышать*, не только нюхать, но и *чуять*; свои же умозаключения он должен сводить не к робкому декартову «мыслю – значит существую», а к твердому, практическому: «я это вижу, слышу, осязаю, чую – значит это так и есть».

Для геометра математика сама по себе есть *конечная цель*, для инженера – это есть *средство*, это есть инструмент такой же, как штангель, зубило, ручник, напильник для слесаря или полусаженок, топор и пила для плотника.

Инженер должен по своей специальности уметь владеть своим инструментом, но он вовсе не должен уметь его делать; плотник не должен уметь выковать или наварить топор, но должен уметь отличить хороший топор от плохого; слесарь не должен уметь сам насекать напильник, но должен выбрать тот напильник, который ему надо.

Так вот, геометра, который создает новые математические выводы, можно уподобить некоему воображаемому универсальному инструментальщику, который готовит на склад инструмент на всякую потребу; он делает все, начиная от кувалды и кончая тончайшим микроскопом и точнейшим хронометром. Геометр создает *методы* решения вопросов, не только возникающих вследствие современных надобностей, но и для будущих, которые возникнут, может быть, завтра, может быть, через тысячу лет.

Вообразите же теперь инженера, вошедшего в этот склад и желающего в нем найти нужный ему инструмент. Он прежде всего будет поражен огромным, подавляющим количеством всего накопленного за 2500 лет материала, его изумительным разнообразием. При более внимательном рассмотрении он заметит среди массы других вещей, кажущихся простыми, и некоторые сложнейшие аппараты непонятного ему назначения, но изумительные по отделке их многочисленных деталей, по тщательной их пригонке, да к тому же оправленные в серебро и золото.

Среди аппаратов новейшего изготовления он увидит множество приборов, служащих для самой точной, самой тщательной отделки изделий, т.е. множество разных шаберов и шлифовальных станков. Заметит он и много устарелого, вышедшего из употребления, местами будет попадаться и просто разный хлам.

Но ведь инженер пришел сюда не затем, чтобы любоваться неисчислимыми сокровищами: не золото и серебро ему нужны, а быстрорежущая сталь, ему нужен не столько шабер, сколько грубая обдирка, грубое надежное зубило, ведь не шабером же будет он выбирать шпунт у ахтерштевня. Присмотревшись еще ближе, он среди этого бесчисленного разнообразия заметит ряд, видимо, издавна систематически подобранных ассортиментов, остающихся почти неизменными в течение 150 лет, к тому же кладовщик ему подскажет, что их так часто требуют, что и не напасешься, а за остальным заходят лишь знатоки – мастера и любители.

Не отнестись ли ему с доверием к этим, еще издавна великими мастерами подобранным ассортиментам и не следует ли ему воспользоваться этими готовыми и десятилетиями, если не столетиями, испытанными инструментами и научиться ими правильно и искусно владеть, а затем уже, когда он сам станет знатоком и мастером, порыться и в остальных сокровищах и попытаться извлечь из них именно то, что ему надо, не брезгуя и шаберами.

Так вот, эти систематические ассортименты – это те курсы, которые вам читают, и те руководства, изучение которых вам рекомендуют, а кладовщики и инструментальщики – это те профессора и руководители, которые вас обучают. Может быть, они сами и не инженеры, но зато они хорошо знают и хорошо владеют вверенным им инструментом, склад свой они изучили и знают, где и что в нем можно найти.

*Корвет «Рында»*

**§ 8.** Однако, чтобы правильно выбрать готовый или правильно подобрать свой ассортимент инструментов, надо ближе разобраться в том деле, для которого он нужен. Для этого опять-таки бегло и в общих чертах проследим развитие кораблестроения.

О судостроении древних культурных народов почти не сохранилось никаких данных, по которым инженер мог бы составить ясное представление о судах, их устройстве, способах их проектирования и постройки. Рассказы некоторых историков по большей части свидетельствуют об их технической безграмотности и легковерии. Между тем начало судостроения восходит задолго до всякой письменности и всякой истории…

Чертежей тогда, по-видимому, не было, или они изготовлялись на покрытых воском дощечках или временных деревянных помостах вроде тех, которыми и теперь пользуются кустари при постройке речных барж; ясно, что от этого ничего не сохранилось, да и не могло сохраниться.

Здесь, видимо, все шло преимущественно чисто практически, передаваясь от отца к сыну, от мастера к ученику, а не как наука.

Даже основной закон о равновесии плавающих тел, данный Архимедом за 250 лет до н.э., был впервые применен к делу судостроения лишь в 1660-х годах Антонием Дином в Англии, когда в ней уже был Ньютон, математический гений которого почитается одинаковым с гением Архимеда.

Но здесь приходится заметить, что, судя по найденному около Туниса, вблизи того места, где был древний Карфаген, затонувшему судну, груженному вчерне отделанными статуями, на котором сохранилась копия того документа, что теперь называют «чартер партией», видно, что и тогда, т.е. примерно 2000 лет тому назад, этот документ составлялся почти в тех же выражениях, как и теперь, также предусматривались случаи «непреодолимых сил», да притом еще и шкипер клялся «Зевсом и всеми богами Олимпа хранить условия чартера свято и нерушимо и добавочного груза на свое судно не принимать». Значит, практика мореплавания и тогда сознавала значение надводного борта, хотя едва ли знала закон Архимеда.

Первые руководства по «Теории корабля» появились в 1740-х годах. В них впервые было установлено учение об остойчивости корабля.

В начале 1800-х годов… были усвоены польза и необходимость диагональных связей, придававших крепость и неизменяемость судовому борту; да и то теория этого дела была обоснована физиком Юнгом.

В 1840-х годах началась постройка железных паровых судов; она стала быстро развиваться, но здесь довольно долгое время (около 30 лет) шли ощупью и сохраняли не только ненужное, но даже вредное наследие деревянного судостроения, вроде толстого, на ребро поставленного полосового киля.

Лишь в 1870 г. Рид дал до сих пор сохранившиеся практические приемы вычисления остойчивости корабля на больших наклонениях и расчеты напряжений, возникающих в связях корабля на волнении.

Сталь в судостроение введена с начала 1800-х годов.

Уточнение расчетов корабля как целого сооружения, а также его важнейших деталей создано трудами И.Г.Бубнова, П.Ф.Папковича, Ю.А.Шиманского, которых я почитаю за честь считать в числе моих учеников.

Отсюда вы видите, насколько молодо действительно научное изучение корабля, его конструкции, его мореходных качеств по сравнению с теми неисчислимыми столетиями, в течение которых существует судостроение и мореплавание, и насколько здесь практика предшествовала теории.

**§ 9.** Постараемся теперь установить в общих чертах тот математический аппарат, которым должен располагать корабельный инженер, чтобы вполне *сознательно рассчитывать* проектируемый им корабль, и притом *военный*, как наиболее сложный, причем инженер никакими правилами ни Ллойда, ни Регистра не стеснен.

Под словом «сознательно» будем разуметь, что инженер хотя и будет применять готовые и давно разработанные методы, но он вполне овладеет теми отделами математики, на которых эти методы основаны, и, значит, может вполне ясно судить об их применимости и условиях ее.

Начнем с теории корабля.

Расчет плавучести и остойчивости требует применения начал интегрального исчисления для вычисления площадей и объемов, положения центра тяжести и проч. Причем все это выражается простыми, а не кратными интегралами, исчисляемыми по приближенным формулам квадратур.

Вычисление остойчивости, кроме того, требует отчетливого понятия о кривизне и эволюте и связи между координатами точек эволюты и эвольвенты. Исследование влияния повреждений на посадку и остойчивость корабля требует для полной отчетливости знания свойств моментов инерции плоской фигуры и определения положения ее главных осей инерции.

Расчет качки на волнении требует знания основ гидродинамики и теории «малых» колебаний твердого тела, как свободных, так и вынужденных, т.е. интегрирования совокупных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Если корабль предположено снабдить успокоителями качки в виде цистерн, то надо иметь еще некоторые сведения из гидродинамики, а если успокоитель должен быть гироскопическим, то требуется более углубленное знание динамики твердого тела.

При этом предполагается, что инженер не будет рассчитывать теоретически «приведенной массы» увлекаемой кораблем воды при качаниях его, а воспользуется имеющимися на этот счет опытными данными, ибо такой расчет потребовал бы таких сведений из гидродинамики, на сообщение которых в курсе не хватило бы времени, если не развивать этот отдел в ущерб другим, более простым, но зато более обиходным.

Ходкость или требует еще более углубленного знания гидродинамики и изучения системы волн, образуемых при движении корабля, или же надо ограничиться применением эмпирических формул и результатов испытания подобных судов и моделей…

Поворотливость плохо поддается учету, и суждение о ней основывают на существующей практике и результатах испытания судов, подходящих по типу к проектируемому.

Итак, положим, что элементы корабля и все, что относится к мореходным его качествам, установлено и рассчитано; тогда идет второй вопрос, где на первый план выступает строительная механика корабля, согласно основаниям которой надо произвести расчеты прочности корабля как целого сооружения и расчеты прочности всех деталей и отдельных устройств его.

Здесь требуется гораздо более сложный математический аппарат, нежели для теории корабля, ибо приходится иметь дело с изгибом и сжатием пластин и устойчивостью их, а для этого требуются основательные познания теории упругости, а следовательно, и весь необходимый математический аппарат с бигармоническим уравнением, учением о рядах, подобных рядам Фурье, и притом не только простых, но и двойных.

Затем возникнут вопросы о подкреплениях под орудиями или башнями и о действии на них выстрела, т.е. сил «малой» продолжительности, и рассмотрение вопроса о том, считать ли это действие «статическим» или «динамическим». Это связано с изучением колебательного движения упругих систем, что требует еще более сложного математического аппарата, нежели вопрос о вибрации всего корабля, и с учением о фундаментальных функциях и характеристических числах. Вместе с тем здесь необходимо столь же отчетливое знание и умение численно интегрировать дифференциальные уравнения, между тем как для учения о плавучести и остойчивости требуется уменье приближенно производить квадратуры.

Как только будет установлено, что́ именно от корабельного инженера требуется *по его специальности*, так сейчас же устанавливается и соответствующий объем знаний из анализа и механики. Но здесь надо тщательно заботиться о том, чтобы не вводить лишних требований; ведь оттого что верхняя палуба покрывается деревянным настилом, нельзя же требовать изучения ботаники, или оттого что в кают-компании диван обит кожей, нельзя требовать изучения зоологии; так и здесь, если при рассмотрении какого-то частного вопроса встречается некоторая формула, то гораздо лучше привести ее без доказательства, а не вводить в курс целый отдел математики, чтобы дать полный вывод этой единичной формулы…

При изучении анализа и механики и подсобных отделов из аналитической геометрии и высшей алгебры должны соблюдаться определенная постепенность и полнота; многое может казаться излишним и непосредственных приложений не имеющим, но оно нужно для ясного усвоения дальнейшего и не может быть пропущено подобно скучной главе романа.

Здесь было бы слишком долго и неуместно перечислять необходимые сведения, т.е. как бы составлять учебный план; достаточно установить его принципы: *соответственно той подготовке, которую инженер должен получить по своей специальности, устанавливается объем его познаний по прикладным предметам, т.е. теории корабля, строительной механике корабля со включением теории упругости (если надо) и сопротивления материалов; как только объем прикладных предметов определен, так определяется и соответствующий объем математических познаний.*

Что касается самого преподавания их и отводимого им места, то может быть два взгляда: или все математическое относить к курсу математики и механики, или же к этим курсам относить только те общие познания, которые входят в несколько, по крайней мере в *два*, прикладных специальных предмета, а те отделы, которые входят только в *один* предмет, относить к введению в этот предмет или к соответствующей главе его.

По сути дела это распределение в конце концов эквивалентно. Гораздо важнее решение другого вопроса, а именно: есть ли необходимость от каждого корабельного инженера требовать все в полном объеме, совершенно для всех однообразном.

Ведь деятельность инженера весьма разнообразна. Один инженер работает и предназначает себя к работе в конструкторском бюро, другой более склонен к работе на производстве, к работе в цехе. Одни инженеры имеют в виду работать специально по коммерческому судостроению, другие – по военному.

Должна ли школа давать как бы законченную подготовку, или она должна давать только те принципиальные основы, на которых инженер на самой службе будет вдумчивой практикой совершенствоваться, непрерывно повышая свою квалификацию, научную и техническую, к чему теперь представляется столько возможностей? Надо помнить афоризм Козьмы Пруткова: «Нельзя объять необъятное».

Надо ли всех подгонять под один шаблон, или надо и в самой высшей школе считаться с индивидуальными способностями если не каждого учащегося, то главных групп учащихся? Не правильнее ли будет, если для каждой такой группы установить минимальное требование по одним предметам, но зато максимальное – по другим? Постановка курса математики и механики будет тогда иная, нежели в первом случае; курс сам собою разобьется на минимальный, общий для всех групп, и на отдельные дополнительные курсы, которые явятся обязательными для групп, соответственно специализировавшихся.

Мне лично думается, что эта последняя система будет более рациональна, нежели система огульного обучения всех и каждого одному и тому же, не считаясь с его склонностью.

**§ 10.** Скажу несколько слов о самом характере постановки преподавания и самого курса математики и механики для инженеров.

Выше уже была отмечена разница взглядов на математику геометра и инженера. Соответственно этой разнице должен быть поставлен и курс.

Для геометра, который должен впоследствии создавать новые методы в математике или новые методы решения математических вопросов, а значит, и должным образом эти методы обосновывать, полная и безукоризненная строгость безусловно необходима.

Для инженера, которому главным образом придется эти методы прилагать к решению конкретных вопросов в узкой области его специальности, такая всеобъемлющая строгость является бесцельной. На инженера эти строгие, лишенные наглядности доказательства и рассуждения наводят тоску и уныние, он видит в них топтание на месте, жевание жвачки, стремление доказывать очевидное, что давно им понято и что ему до доказательства кажется более ясным и понятным, нежели после доказательства.

Геометр обыкновенно мало ценит вычислительные процессы, особенно доведение их до конца, т.е. до численного результата, вычисляемого с заданной наперед, обыкновенно небольшой степенью точности; инженер же смотрит на дело как раз обратно: в решении вычислением конкретно поставленного вопроса он видит и ценит именно прикладную сторону, усматривая в ней пример того, как надо поступать в аналогичном случае в предстоящей ему практике.

**§ 11.** Молодые инженеры часто склонны относиться с своего рода пренебрежением «к разного рода правилам Ллойдов и Регистров», считая, что эти правила составлены по принципу «назначь размер, скажем толщину, на глаз да четверть дюйма прибавь».

На самом же деле это далеко не так. Возьмем для примера английский Ллойд. Он существует как классификационное общество, т.е. наблюдающее за надлежащей прочностью корабля и его снабжения как во время постройки, так и во время службы, сто лет. Все случаи повреждения судов осматриваются его инспекторами, рассеянными по портам всего мира, и доводятся до сведения главной лондонской конторы Общества, в которой работают опытнейшие инженеры с обширной практикой и широким научным образованием.

Сейчас в списках английского Ллойда находится около 35 тысяч пароходов всех наций; отсюда можно заключить, какой огромный материал и какое богатство опытных данных и «случаев» накопляется в его главной конторе.

Правила Ллойда не являются неизменными, они постоянно совершенствуются на основании действительного опыта плавания судов и анализа аварий или повреждений, ими понесенных. Более того, предоставлено отступать от буквы этих правил, подтверждая отступление расчетами, представляемыми на просмотр и одобрение главной конторы, в которой таким образом группируется и этот опыт, ведущий к постоянному совершенствованию правил. Ввиду этого правила периодически переиздаются, причем в них вносятся существенные изменения, польза которых оправдалась практикой; поэтому правила эти заслуживают внимательного и вдумчивого изучения.

**§ 12.** Знаменитый английский натуралист Гексли лет 70 тому назад сказал: «Математика, подобно жернову, перемалывает лишь то, что под него засыпают». Вы видели, что в строгой «евклидовой» математике эта засыпка состоит из таких аксиом и постулатов, в справедливости которых инженер усомниться не может, а так как лишь эти аксиомы и постулаты «перемалываются» без *добавления новых* (а если что добавляется, то должно быть точно и ясно указано), то инженер и придает такую веру математическому доказательству.

Но здесь необходимо постоянно иметь в виду следующее обстоятельство: когда конкретный вопрос приводится к вопросу математическому, то всегда приходится делать ряд допущений, ибо математика вместе с механикой оперируют над объектами *идеальными*, лишь более или менее близкими к объектам *реальным*, к которым инженер будет прилагать полученные математические выводы. Ясно, что сколько бы ни было точно математическое решение, оно не может быть точнее тех приближенных предпосылок, на коих оно основано. Об этом часто забывают, делают вначале какое-нибудь грубое приближенное предположение или допущение, часто даже не оговорив таковое, а затем придают полученной формуле гораздо большее доверие, нежели она заслуживает, и это потому, что ее вывод сложный.

**§ 13.** В очерке о П.А.Титове [1] указано, что инженер должен непрестанно накоплять практический опыт, он должен выработать свой глазомер и сразу видеть, верен ли результат расчета, или нет. А вот другой пример. Знаменитый итальянский математик Туллио Леви Чивита, между прочим составивший превосходный курс механики, прочел года три тому назад в Вене, по приглашению Австрийского общества инженеров, доклад «О динамической нагрузке упругих систем».

Изящнейшими с математической стороны выводами он установил некоторый общий критерий, которым определяется верхний предел динамической нагрузки, т.е. такое значение ее, которого она при данных обстоятельствах превзойти не может.

В формулы Леви Чивита входит продолжительность действия нагрузки, поэтому, например, получилось, что при проходе поезда по мосту динамическая нагрузка тем *больше*, чем скорость хода поезда *меньше*.

Как правоверный математик он верит своей формуле больше, нежели глазу и здравому смыслу, и не видит в ней наглядной несообразности. Математически его формула верна, но она дает слишком большое значение сказанного верхнего предела, не имеющее практического значения.

Возьмем для примера знаменитый мост «Британия», построенный в 1848 г. Пролеты этого моста имеют длину около 450 футов, сечение моста коробчатое, со сплошными боковыми стенками и со сплошными, и притом двойными, верхнею и нижнею панелями, так что каждый пролет имеет аналогию с кораблем. Так вот, по формуле Леви Чивита при проходе по этому мосту товарного поезда, идущего самым малым ходом, верхний предел динамической нагрузки получается 3000 т на погонный фут, т.е. 1350000 т на весь пролет. На самом же деле верхний предел этой нагрузки есть 3 т на погонный фут, т.е. 1350 т на весь пролет. На эту нагрузку он и рассчитан его знаменитыми строителями

[1] См. следующую статью. (*Прим. ред.*)

Ферберном и Стефенсоном, и стоит он с 1848 г. незыблемо, пропустив миллионы поездов с большими и малыми ходами.

Конечно, 3000 т больше 3 т, формула Леви Чивита верна, а какой в ней толк?

Всякий инженер заметил бы практическую непригодность формулы и, обратившись к предпосылкам, сделанным при ее выводе, легко увидел бы несоответствие действительности, а знаменитый математик, привыкший со всею «евклидовой» строгостью перемалывать аксиомы и постулаты, не заметил грубости одного из своих постулатов, сообразно которому и получил столь высокий верхний предел.

Титова знали немногие корабельные инженеры того времени. Знаменитого Леви Чивита за его чисто математические работы знают и почитают математики всего мира. Если бы вы готовились быть математиками, я пожелал бы вам стать Леви Чивитами, но вы готовитесь быть корабельными инженерами, поэтому желаю вам стать Титовыми.

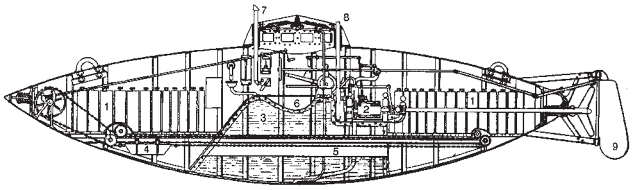
# Корабельный инженер-самоучка

***А.КРЫЛОВ***

В 1894 г. ВНЕЗАПНО СКОНЧАЛСЯ ОДИН ИЗ САМЫХ ЗАМЕчательных русских корабельных инженеров – Петр Акиндинович Титов, памяти которого я и хочу посвятить эти строки.

Отец Петра Акиндиновича был родом рязанский крестьянин и служил машинистом на пароходах Петрозаводской линии. Когда сыну минуло 12 лет, он стал брать его на лето к себе на пароход подручным в машину, а на зиму посылал на работу на Кронштадтский пароходный завод; с 16-летнего возраста он определил его рабочим в корабельную мастерскую Невского завода. Из корабельной мастерской Петра Акиндиновича назначили на плаз подручным, с плаза – в заводскую чертежную, а из чертежной – сперва плазовым мастером, а потом помощником корабельного мастера, которым тогда был памятный старым инженерам англичанин Бейн. В те годы к Невскому заводу относилась и Охтинская адмиралтейская верфь, на которой в то время строился полуброненосный фрегат «Генерал-адмирал». Постройка его еще не была доведена до конца, как Бейн умер, и мастером был назначен молодой тогда П.А.Титов. После «Генерал-адмирала» на том же заводе Титовым были построены клиперы «Разбойник» и «Вестник».

В 1881 г. Военно-инженерное ведомство решило построить сразу пятьдесят малых подводных лодок системы Джевецкого, приводимых в движение ножным приводом, на котором работало два человека из числа трех, составлявших экипаж лодки. Постройка должна была вестись совершенно секретно на специальном небольшом заводе, производившем сборку; изготовление же отдельных частей было поручено разным заводам.




*Подводная лодка Джевецкого образца 1881 года, переоборудованная в электроход*

Корпус лодки состоял из трех выгнутых железных листов довольно хитрой формы. Листы эти были вычерчены в различном масштабе и розданы для изготовления трем разным заводам, в том числе и Невскому. Два из этих заводов, побившись над этим делом и перепортив немалое количество материала, передали затем свой заказ Невскому заводу, и таким образом работа оказалась сосредоточенной в руках Титова. Петр Акиндинович любил об этом вспоминать.

– Поступили к нам заказы от разных заводов на листы, выкроенные какими-то ускорниками вроде тех, что получаются, когда с апельсина корку звездочкой снимать, и все вычерчены в разных масштабах, к тому же один в футовой мере, другие в метрической, и надо их не только выкроить, но и выколотить по чертежу. Думаю, неспроста это, хоть и с разных заводов. Вычертил я их все три в одном масштабе и посмотрел, что будет, если их все вместе сложить. Получился как бы большой американский орех. Тогда, ясное дело, согласовал я у них пазы, сделал накрои, как следует выколотил три листа и сложил вместе. Приезжает Джевецкий, с ним француз, потом мой приятель Гарут; как взглянули, так и ахнули:

– Ведь это секрет!

– Какой там, – говорю, – секрет; давайте лучше я вам в ваших листах и дыры проколю, а то придется на месте трещеткой сверлить – никогда не кончите.

Так и сделал я им эти листы, а потом их Гарут на своем заводике склепывал.

Кажется, в 1882 г. Охтинская верфь была закрыта. Завод Берда купило вновь основанное Франко-русское общество, которое также получило в безвозмездное «арендное пользование» Галерный островок с бывшими на нем эллингами и мастерскими. При этом Обществу были заказаны по высокой цене крейсеры «Витязь» и «Рында».

Первым директором образовавшихся Франко-русских заводов был француз, инженер Павел Карлович Дюбюи, родственник молодой красавицы-француженки Марии Ивановны, на которой незадолго перед этим женился морской министр, адмирал И.А.Шестаков.

Стал Дюбюи искать корабельного инженера, которому он мог бы вверить верфь Галерного островка и постройку крейсеров. Обратился он к своему товарищу по парижскому инженерному училищу Джевецкому, и тот рекомендовал ему П.А.Титова. Таким образом, Петр Акиндинович стал главным инженером и управляющим верфью Галерного островка, хотя, обладая редкой практической опытностью по всем частям кораблестроения, он не имел диплома даже сельской школы.

«Рында» и «Витязь» были наши первые суда, построенные не из железа, а из судостроительной стали, и Петру Акиндиновичу пришлось самому выработать все приемы предосторожности при ее обработке, в особенности горячей, которой в то время при острых обводах, при вварных бимсовых кницах, при множестве разного рода угольников было особенно много.

При спуске «Витязь», по вине заведующего землечерпанием в Петербургском порту, потерпел серьезную аварию. Эллинг, в котором «Витязь» строился, пустовал 17 лет, и перед ним из правого устья Фонтанки (теперь запруженного) нанесло мель. Для устройства подводного спускового фундамента между дамбами была сделана перемычка, которую разобрали перед спуском, выдернув шпунтовые сваи краном, причем глину, забитую между ними, было решено убрать землечерпалкой, углубив вместе с тем и канал, составлявший продолжение канала между дамбами. Вот эта работа и была выполнена петербургским портом недостаточно внимательно, так что при спуске «Витязь» пробороздил кормой по грунту, шкалы (задержники) у руля обломились, руль положился на борт и выворотил петли, вместе с ахтерштевнем.

Предстояла тяжелая и сложная работа по замене ахтерштевня новым, и тут-то и проявилась вся опытность и находчивость Петра Акиндиновича. Он построил деревянный кессон по кормовым обводам «Витязя», подвел его под корму, выкачал воду и за зиму, не вводя судна в док, сменил ему ахтерштевень.

Через 20 лет подобную же работу произвели в Порт-Артуре П.Ф.Вешкурцев и Н.Е.Кутейников, исправив повреждения, причиненные взрывами мин броненосцам «Ретвизан» и «Цесаревич» и крейсеру «Паллада».

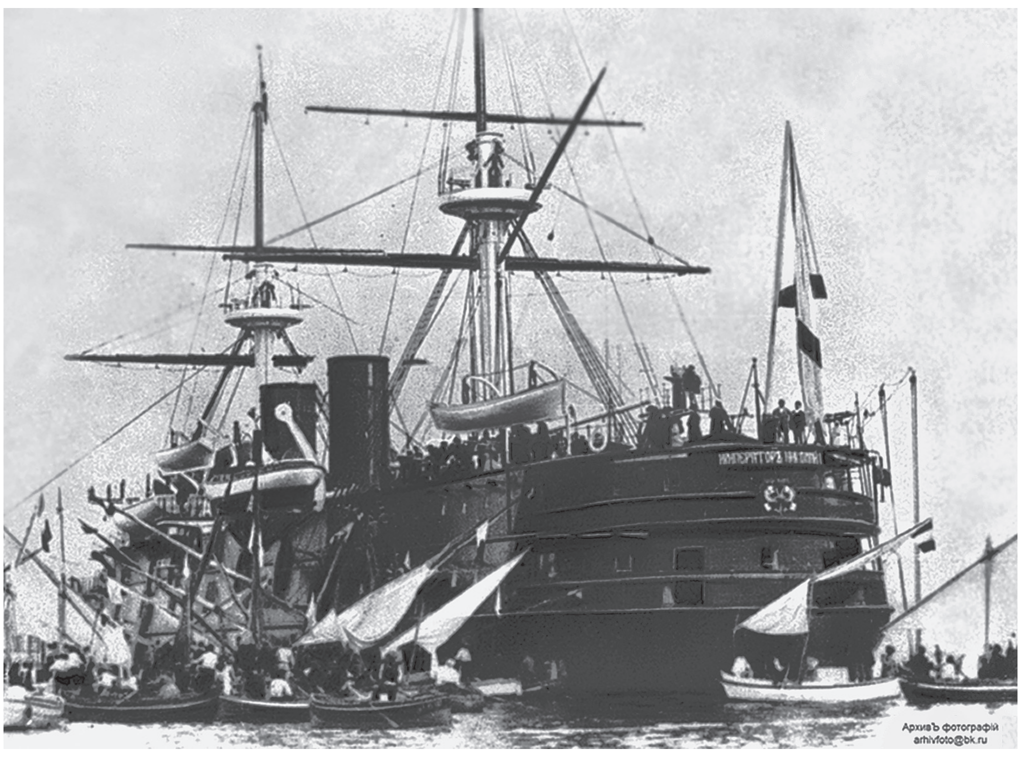
По окончании постройки «Рынды» и «Витязя» Франко-русский завод получил заказ на постройку броненосца «Император Николай I».

Здесь Петр Акиндинович ввел целый ряд оригинальных приемов работы, важнейшим и самым смелым из которых была постройка корабля без рыбин; вместо последних ему служили днищевые и палубные стрингеры. Заводу это давало несколько тысяч экономии на лесе и рабочей силе, но зато требовало от Петра Акиндиновича необыкновенной энергии и труда: всю разбивку стрингеров и растяжку их на плазе с разметкой центров дыр он исполнял сам, своими руками, после шабаша и ночью, так как в рабочее время он всецело был поглощен текущей работой. Помощников инженеров у него не было.

Я хорошо помню это время. В июле 1887 г. я был командирован поступлением в академию на практику по кораблестроительным работам на Франко-русский завод. Облачившись в полную парадную форму, я явился к наблюдающему за постройкой старшему судостроителю Н.Е.Кутейникову, познакомился с моими будущими сотоварищами, его помощниками, корабельными инженерами Е.А.Введенским, Н.И.Хомяковым и Н.И.Боковым, а затем пошел представиться управляющему верфью. Меня радушно принял сидевший за письменным столом в маленьком, площадью не более 6 кв. метров, кабинетике могучий русский богатырь, с которого Васнецов смело мог бы писать Илью Муромца. Выслушав, что мне надо, он сказал, что все, что есть на заводе, для меня всегда открыто и что чем большему я научусь, тем радостнее ему будет. Это был Петр Акиндинович Титов. Вскоре мы с ним, несмотря на разницу лет (он был старше меня на 20 лет), сошлись, а затем и подружились.

При постройке «Николая I» Петр Акиндинович применил и целый ряд детальных усовершенствований в производстве работ, которые вели к большей их точности и тщательности, не только не повышая стоимости, но даже снижая ее. Как пример, укажу на разметку и затем проколку дыр. Дыры на листах размечались по рейке с плаза, и намеченные центры их сперва прокернивались, как обычно, кернером, по которому разметчик ударял ручником; получался конический керн диаметром около 2 мм. После этого проходили вторым кернером или бородком, по которому молотобоец ударял тяжелой кувалдой; получался конический же керн, но диаметром около 6 мм и глубиной около 4 мм.

Штемпель дыропробивного пресса оканчивался не просто кругом, как обыкновенно, а в середине этого круга возвышался конус высотой около 5 мм при диаметре около 7 мм. Благодаря этому прокалывание дыр происходило следующим образом. Штемпель, спускаясь, прежде чем нажать лист, касался производящей своего конуса, прокерненного на листе, и сам собой продвигал лист так, что оси обоих конусов совпадали. Лист получался абсолютно центрированным, а дыра — правильно пробитой.




*Броненосец «Император Николай I»*

Другой, также по виду, мелочью, значительно ускорявшей и уточнявшей работу, была зенковка дыр. Надо помнить, что 50 лет назад пневматики не было, электрическое освещение было в зародыше (четыре свечи Яблочкова — больше для курьеза, чем для света, на весь эллинг), о газовой резке никто и не помышлял. Если надо было сверлить или зенковать дыру на месте, то это делалось вручную трещоткой, ибо других средств не было. Отсюда, естественно, возникала забота — все дыры раззенковать на станке. Петр Акиндинович и тут ввел крайне простое приспособление — зенковку с направляющим стержнем и заплечиком. Рабочий, зенкуя, просто нажимал рычаг, пока заплечик зенковки не упрется в поверхность листа. Очевидно, что таким образом работа шла быстрее, не требуя со стороны рабочего напряженного внимания, и все дыры потом получались абсолютно одинаковыми и назначенного размера.

Плотность клепки сильно зависит от правильного держания и достаточного веса поддержки. На эту сторону Петр Акиндинович обращал особенное внимание, и у него был целый ряд весьма остроумных и простых приспособлений, чтобы обеспечить правильное держание тяжелой поддержки, не вызывая излишнего утомления рабочего. Чеканка в то время, само собой разумеется, производилась вручную, и здесь Титовым также были выработаны свои приемы работы.

Среди рабочих Петр Акиндинович пользовался безграничным уважением и авторитетом, ибо рабочие видели в нем своего человека, который каждую работу знал и умел выполнять в совершенстве. И действительно, часто можно было видеть, как Титов подходил к молодому, еще неопытному рабочему, брал у него, например, ручник и зубило и показывал, как надо, обрубая кромку листа, держать зубило, как бить ручником и прочее. При этом стружка у него завивалась как бы сама собой, и старики-рабочие любовались его работой.

В то время не существовало еще и светокопировки. Подлинные чертежи, представлявшиеся на утверждение министру или иным высоким начальникам, исполнялись на бумаге в тушь и раскрашивались; копии снимались на коленкор и также раскрашивались. Поэтому на общих чертежах, поступавших на завод из Морского технического комитета для руководства при постройке, с гораздо большей тщательностью разделывались пуговицы на креслах адмиральской каюты или узор ее ковра, нежели существенные детали судна.

Все рабочие и исполнительные чертежи разрабатывались самим заводом, и вот тут все дивились на Петра Акиндиновича. Вся кораблестроительная чертежная занимала комнату примерно в 30 кв. метров, в которой помещалось семь чертежных столов; из них один был занят заведующим чертежной инженер-технологом А.М.Карницким, на двух других работали старшие чертежники – Надточеев и Михайлов, а на остальных – четыре молодых чертежника-копииста. Для всякой детали, для всякого устройства, даже таких крупных, как штевни, рулевая рама, кронштейны для валов и пр., Петр Акиндинович давал набросанный им самим эскиз с размерами. Чертил он от руки на обыкновенной графленой в клетку бумаге, всегда пером и с необыкновенной быстротой. Передав чертеж Надточееву или Михайлову, он изредка подходил к ним, чтобы поправить какую-либо мелочь или указать подробность.

Верность его глаза была поразительная. Назначая, например, размеры отдельных частей якорного или буксирного устройства, или шлюпбалок, или подкреплений под орудия, он никогда не заглядывал ни в какие справочники, стоявшие на полке в его кабинете, и, само собой разумеется, не делал, да и не умел делать никаких расчетов. Н.Е.Кутейников, бывший в то время самым образованным корабельным инженером в нашем флоте, часто пытался проверять расчетами размеры, назначенные Титовым, но вскоре убедился, что это напрасный труд, — расчет лишь подтверждал то, что Титов назначил на глаз.

Эти расчеты Н.Е.Кутейников поручал исполнять своим помощникам. Еще будучи в Морском училище, я самостоятельно изучил примерно университетский курс высшего анализа; после выпуска я три года работал по девиации компасов и по разным другим вопросам, требовавшим приложения математики (как помощник И.П.Колонга и под его руководством). Н.Е.Кутейников вскоре заметил, что я гораздо свободнее владею математикой, нежели его помощники-инженеры, и поэтому более сложные расчеты стал поручать мне. Заметил это и Титов и иногда, подзывая меня, говорил:

– Зайди-ка, мичман, ко мне, подсчитай-ка мне одну штучку.

В 1888 г. я поступил в Морскую академию, в 1890 г. окончил в ней курс и был сразу назначен руководителем практических занятий слушателей по математике; вскоре, ввиду болезни, а затем длительной командировки А.А.Грехнева, мне было поручено чтение курса теории корабля. В это время на Франко-русском заводе строился броненосец «Наварин», и я частенько забегал на Галерный островок проведать Петра Акиндиновича и увидеть что-нибудь новенькое.

Как-то раз он мне и говорит:

— Хоть ты теперь и профессор, да и чин у тебя другой, а я все тебя мичманом буду звать. Так вот, мичман, вижу я, ты по цифирному делу мастак. Обучи ты меня этой цифири, сколько ее для моего дела нужно, – только никому не говори, а то еще меня засмеют.

И стали мы с Петром Акиндиновичем по вечерам каждую среду и субботу заниматься математикой, начав с элементарной алгебры. Нечего говорить, что я редко встречал столь способного ученика и никогда не встречал столь усердного. Петр Акиндинович быстро увидел, что алгебра есть основной математический инструмент, и решил, что им надо научиться владеть быстро, уверенно и безошибочно. И вот, возвратившись с завода, он садился за задачник Бычкова и до поздней ночи решал задачу за задачей, чтобы «руку набить».

Так мы в два года прошли элементарную алгебру, тригонометрию, начала аналитической геометрии, начала дифференциального и интегрального исчисления, основания статики, основания учения о сопротивлении материалов и начала теории корабля. Титову было тогда 48–49 лет.

Особенно радовался Петр Акиндинович после того, как он усвоил тригонометрию, вычисление по логарифмам и пользование логарифмической линейкой, что тогда тоже было как бы редкостью.

В то время когда мы, наконец, дошли до сопротивления материалов и расчетов балок, стоек и пр., как раз заканчивалась постройка «Наварина», и не раз Петр Акиндинович говаривал мне:

– Ну-ка, мичман, давай считать какую-нибудь стрелу или шлюпбалку.

По окончании расчета он открывал ящик своего письменного стола, вынимал эскиз и говорил:

– Да, мичман, твои формулы верные: видишь, я размеры назначил на глаз – сходятся.

Лишь восемнадцать лет спустя, занимая самую высокую должность по кораблестроению, я оценил истинное значение этих слов Титова. Настоящий инженер должен верить своему глазу больше, чем любой формуле; он должен помнить слова натуралиста и философа Гексли: «Математика, подобно жернову, перемалывает лишь то, что под него засыпают», – и вот на эту-то засыпку прежде всего инженер и должен смотреть.

Кажется, в 1891 г. приехал в Петербург председатель правления Общества франко-русских заводов, старик-француз, бывший много лет директором кораблестроения французского флота, член Парижской академии наук, знаменитый инженер де Бюсси. Само собой разумеется, что он посетил постройку «Наварина».

П.К.Дюбюи хотел его быстренько провести по постройке и увести на какой-то званый завтрак. Но не тут-то было. Старик сразу заметил, что постройка ведется не рутинными, а оригинальными способами, быстро свел Дюбюи на роль простого переводчика и стал вникать во все детали, расспрашивая Титова. Он забыл и про завтрак, облазил весь корабль, проведя на постройке часа четыре. Расставаясь, он взял Титова за руку и, не выпуская ее, сказал при всех Дюбюи:

– Переведите вашему инженеру мои слова. Я 48 лет строил суда французского флота, я бывал на верфях всего мира, но нигде я столь многому не научился, как на этой постройке.

Титов был растроган почти до слез, — зато вечером и было же у него приятелям угощение!

Кажется, в 1892 или 1893 г. Морское министерство организовало конкурс на составление проекта броненосца по объявленным заданиям, причем были назначены две довольно крупные премии.

На конкурс было представлено много проектов, и по рассмотрении их Техническим комитетом были признаны: заслуживающим первой премии проект под девизом «Непобедимый» и второй премии — проект под девизом «Кремль».

Вскрывают конверт с девизом и читают: «Составитель проекта под девизом «Непобедимый» — инженер Франко-русского завода Петр Акиндинович Титов»; затем читают: «Составитель проекта под девизом «Кремль» инженер Франко-русского завода Петр Акиндинович Титов».

Произошла немая сцена, более картинная, нежели заключительная сцена в «Ревизоре», ибо многие члены комитета относились к Титову свысока и говорили про него: «Да он для вразумительности слово инженер пишет с двумя ятями». И вдруг такой пассаж: два его проекта, оригинальных, отлично разработанных, превосходно вычерченных и снабженных всеми требуемыми расчетами, получают обе высшие премии.

От получения премий Петр Акиндинович отказался, передав их, кажется, в пользу Морского инженерного училища.

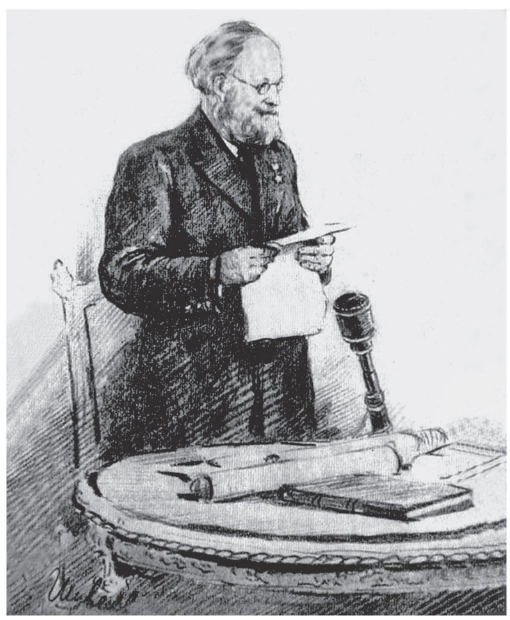
Но не суждено было Петру Акиндиновичу построить ни «Непобедимого», ни «Кремля» — в ночь на 16 августа 1894 г. он внезапно скончался в возрасте 51 года, в полном расцвете сил и таланта.

# О волновом сопротивлении воды и о спутной волне

***А.КРЫЛОВ***

Осенью 1885 г. мне пришлось под руководством И.П.Колонга уничтожать девиацию у кормовых путевых компасов минного крейсера «Лейтенант Ильин», который тогда вышел на приемные ходовые испытания. В то время это было самое быстроходное и самое большое из минных судов нашего флота. Его ход был равен 20–21 узлу [1], водоизмещение – 750 т.

Меня тогда же поразили почти полное отсутствие буруна у форштевня, незначительность носовой волны, сравнительно небольшие расходящиеся волны и система весьма больших (высотой около 2 м) поперечных волн за кормой, бежавших за кораблем, но со скоростью, меньшей скорости его хода, так что эта система волн отставала от корабля; однако при мертвом штиле она была ясно заметна на расстоянии более 2 миль, что было видно по вехам мерной мили. Волны на свое образование требуют затраты энергии; становилось ясным, что эта энергия доставлялась главными механизмами корабля и безвозвратно уносилась в море.



*Портрет А.Н.Крылова за работой*

Это являлось весьма наглядным подтверждением теории, данной за 10 лет перед тем В.Фрудом, заключающейся в подразделении полного сопротивления

---

[1] Интересно, что:
1 узел = 1 морская миля в час,
1 морская миля в час = 1,852 км,
1 фут = 12 дюймов = 0,3048 м,
1 сажень = 1/500 версты = 3 аршина = 12 пядей = = 48 вершков = 7 футов = 2,1336 м.
(*Прим. ред.*)

воды на сопротивление от трения и волновое сопротивление и в раздельном определении того и другого по опытам над моделями, а затем определении потребной мощности для данной скорости хода корабля.

Наш Опытовый бассейн был открыт в 1892 г. по совету Д.И.Менделеева.

1 января 1900 г. я был назначен на должность заведующего бассейном и с лета 1900 г. приступил к ряду натурных прогрессивных испытаний судов, которые прежде почти не производились; параллельно испытывались и модели этих судов.

Было весьма удивительно, насколько близко теория Фруда, несмотря на известное ее противоречие теоретическим основам гидродинамики, согласовалась с действительностью (погрешность в скорости составляла около 2–2,5%), хотя многие суда («Петропавловск», «Севастополь», «Полтава», «Александр III») были полного образования и главная часть мощности поглощалась у них волновым сопротивлением.

В январе 1898 г. была опубликована статья Митчеля о теории волнового сопротивления. Я пытался тогда же приложить эту теорию к вычислению волнового сопротивления, но с первых же шагов встретил такие основные гипотезы, общие для большей части положений классической гидродинамики, которые меня сразу оттолкнули от затраты большого труда и времени на обстоятельное изучение статьи Митчеля и на постановку опытов для ее проверки, – настолько эти гипотезы казались противоречащими всей установившейся практике бассейнов, как нашего, так и заграничных.

К такого рода гипотезам относятся следующие допущения.

1. Жидкость предполагается *идеальной,* т.е. не вязкой. Вся же деятельность бассейна основывалась на вычислении *трения* на основании опытов Фруда, а в идеальной жидкости внутреннего трения или вязкости нет.

2. Жидкость предполагается несжимаемой – такая жидкость звука проводить не может. Между тем, в это время изучался гидрофон системы Ниренберга; гидрофон так оглушительно выл в Галерной гавани, что его было слышно за 7 верст на Невском плавучем маяке; по воздуху же туда звук не достигал. Предварительные опыты с этим гидрофоном производились в бассейне. Опять выходило непримиримое противоречие между теоретической гидродинамикой идеальной жидкости и практикой.

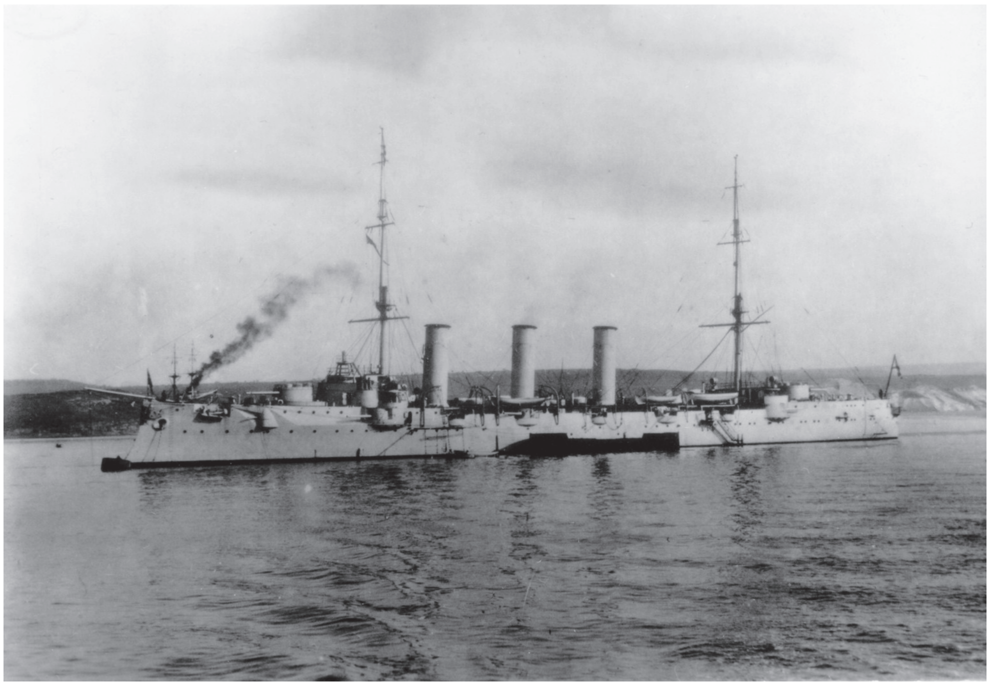
В 1909 г., когда я уже был главным инспектором кораблестроения и председателем Морского технического комитета, по моему представлению, ввиду предстоявших испытаний быстроходных миноносцев и строившихся наших первых дредноутов, было решено произвести в Черном море, на Лукулльской мерной миле, испытания влияния глубины воды на волновое сопротивление. Для производства этих испытаний была назначена комиссия под председательством заведующего бассейном проф. И.Г.Бубнова при участии персонала бассейна.

В распоряжение комиссии был предоставлен на *два месяца* крейсер «Кагул», водоизмещением 6500 т, стоимостью в 8 млн тогдашних рублей; таким образом, одно погашение и проценты на затраченный капитал за два месяца составляли около 150000 рублей. К этим накладным расходам надо прибавить содержание и довольствие команды (500 человек), офицеров и механиков (25 человек) и стоимость угля, масла и пр. – еще около 50000 рублей.

Результаты этих испытаний, произведенных с большой точностью специально построенными самозаписывающими приборами, были опубликованы отдельной книгой и не утратили своего значения и поучительности и по сие время. Дело в том, что проф. Сретенский в 1938 г. развил и обобщил теорию Митчеля, а проф. Ханович и проф. Павленко показали упрощенные способы производства относящихся сюда числовых расчетов.

Таким образом, результаты испытаний «Кагула» дают возможность сличить чисто теоретические расчеты с непосредственно наблюденными данными, установив при этом размеры спутной волны, что при теперешних быстроходных судах и сравнительном мелководье Финского залива получает немаловажное практическое значение.

На той же Лукулльской мерной миле в 1915 г. под председательством контр-адмирала Белоголового работала комиссия по производству приемных испытаний шести миноносцев типа «Быстрый» (водоизмеще-



*Крейсер «Кагул»*

ние 1350 т, машина в 30000 л.с., ход 35 узлов). В числе контрактных испытаний было оговорено 10-часовое испытание при скорости в 30 узлов, что требовало мощности около 0,8 от полной.

Не зная об испытаниях «Кагула» или не придавая им значения, контр-адмирал Белоголовый хотел добиться требуемого хода 30 узлов и на глубине около 20 м. Однако, хотя машина развила мощность не в 20000, а в 30000 сил и даже больше, ход оставался равным 29 узлам и дальше не возрастал. За кормой бежала громадная волна, и, если бы не протест представителя завода (с записью в акт испытаний и в вахтенный журнал), котлы были бы сожжены и произошел бы массовый разрыв котельных трубок, причем пострадали бы кочегары, подобно тому как в 1888 г. от другой причины на броненосце «Синоп» были обварены насмерть 29 кочегаров и матросов.

Авария на «Кагуле» имела бы и другие чрезвычайно тяжелые последствия: личный состав всего флота потерял бы доверие к водотрубным котлам, т.е. флот потерял бы доверие к своим кораблям, а это уже значительно важнее, чем доверие или недоверие к формуле Митчеля, к гипотезам гидродинамики или к справедливости математических преобразований.

Испытания на Лукулльской миле были прекращены (продолжением их явились испытания близ мыса Сарыч, где глубина воды составляла около 100 саженей и миноносец свободно развил 30 узлов при мощности, несколько большей 20000 сил).

Мне было поручено разобрать это дело. Я тогда же составил о нем подробную записку, которая только в 1931 г. была напечатана в «Бюллетене Научно-технического комитета» под заглавием «Об испытаниях миноносца «Быстрый».

Сущность явления состоит в том, как это было установлено опытами Ярроу еще в 1905 г., что при скорости

$$v = \sqrt{gh}\,,$$

где $v$ – скорость, $h$ – глубина воды, $g$ – ускорение силы тяжести, образуется спутная волна, скорость бега которой равна скорости хода корабля, и добавочная мощность, развиваемая машиной корабля, затрачивается не на увеличение скорости хода, как было бы на глубокой воде, а на поддержание этой волны. Надо, чтобы машина развила мощность, соответствующую примерно скорости, на 5–6 узлов большей указанной «критической»; тогда корабль, как бы скачками, сразу достигнет этой повышенной скорости и далее пойдет нормально, подобно тому как на глубокой воде.

Скорость 30 узлов составляет 51 фут в секунду; «критическая» глубина воды:

$$h = \frac{v^2}{g} = \frac{51 \cdot 51}{32{,}2}\ \text{фут} = 81\ \text{фут} = 14{,}5\ \text{сажени}\,;$$

это как раз та глубина, на которой производилось испытание на Лукулльской мерной миле, и надо было бы развить мощность не в 20000 сил, соответствующую 30 узлам, а мощность, соответствующую 36 узлам, около 33000 сил, т.е. большую, нежели предельная.

Стремление достигнуть скорости в 30 узлов на 10-часовом испытании было бы равносильно производству испытания самым полным ходом в течение 10 часов, что надорвало бы котлы.

В 1912 г. миноносец «Новик» под командованием капитана 2-го ранга Д.Н.Вердеревского проходил 20-узловым ходом в расстоянии около 6 миль мимо маяка, расположенного при входе в один из шхерных фарватеров, подобно тому как башня Грохара расположена при входе в Гельсингфорс. У этого маяка была построена на сваях деревянная пристань, помост которой возвышался над водой на 9 футов. Был мертвый штиль, на пристани лежала вверх килем шлюпка, и около нее играли два мальчика, один 10 лет, другой 6 лет. Старший заметил, что по морю к пристани идет высокая волна, и бросился бежать к берегу; младший остался на пристани. Волна вкатила на пристань, смыла шлюпку и все, что было на пристани, в том числе и мальчика, который и утонул. Само собой разумеется, что с «Новика» ничего этого видно не было, и лишь по приходе в Ганге командиру была доставлена телеграмма о происшедшем несчастии.

Было наряжено следствие, и морской министр поручил мне доложить ему это дело. Оказалось, что на открытом плесе по пути «Новика» была короткая банка с глубиной воды в 35 футов. Эта глубина является как раз «критической» для скорости 20 узлов; на ней и образовалась громадная волна, которая затем побежала дальше и натворила беду. Это была воистину «непредвиденная на море случайность».

Случай с «Новиком» показывает, насколько опасно не для самого корабля, а для маяков, башен, знаков, построенных на низменных местах, для мимо идущих судов и пр. развитие на данной глубине «критической» и близких к ней скоростей (начиная примерно от скорости в 0,75 до 1,25 от критической).

Подвергнув заново исследованию волновое сопротивление «Кагула» и определив по формулам проф. Сретенского элементы спутной волны для типичных судов Краснознаменного Балтийского флота (эскадренного миноносца, лидера, крейсера, линейного корабля), можно было бы нанести на генеральные карты Балтийского моря изобаты, т.е. линии равных глубин, соответствующие критическим скоростям. Изучив такую карту и имея ее перед собой, командир или старший штурман корабля могли бы выбирать курсы и скорости своего корабля так, чтобы не причинять вреда береговым сооружениям. Вместе с тем им не пришлось бы удивляться внезапным падениям ходкости корабля и приписывать неведомым причинам это естественное и неизбежное явление.

Такая работа, выполненная в Военно-морской академии, была бы полезным упражнением для слушателей академии и в то же время могла бы с пользой послужить и для флота.

# Гравитационный бильярд, или Механическая модель лазерного резонатора

**А.АНДРЕЕВ, А.ПАНОВ**

Лазерный резонатор представляет собой простое оптическое устройство – два сферических зеркала, расположенных друг против друга. В прошлом номере «Кванта» в статье «Лазерный резонатор» обсуждался вопрос об устойчивости такого резонатора.

Если коротко, то речь шла о следующем. В зависимости от сочетания радиусов зеркал $R_1$ и $R_2$ и расстояния $L$ между ними (рис.1) световой луч, проходящий вблизи оси (параксиальный луч), демонстрирует два типа поведения. При одних сочетаниях параметров параксиальный луч после нескольких отражений выбрасывается из пространства между зеркалами, и такой резонатор называется неустойчивым. При других сочетаниях параксиальный луч при любом количестве отражений продолжает оставаться внутри резонатора, и такой резонатор называется устойчивым. С помощью теоремы Виета и формулы сферического зеркала был выведен критерий устойчивости лазерного резонатора, а с помощью компьютерного эксперимента этот критерий был подтвержден.

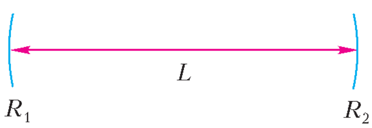



*Рис.1. Лазерный резонатор, заданы радиусы зеркал и расстояние между ними*

Сейчас мы добавим к этому простой физический эксперимент, который позволит увидеть наяву эту самую устойчивость / неустойчивость, и заодно сконструируем механическую модель лазерного резонатора.

## Гравитационный бильярд

На этот раз в качестве одного зеркала мы используем резиновую пленку от воздушного шарика, в качестве «другого зеркала» – гравитационное поле, а световой луч заменим металлическим шариком.

*Рис.2. Из-за разности давлений воздуха резиновая пленка принимает сферическую форму*

На обычную стеклянную банку натянем кусок резиновой пленки. Нажмем на нее и выпустим из банки немного воздуха, чтобы под действием атмосферного давления пленка прогнулась внутрь, а затем зафиксируем ее резиновым колечком (рис.2). Если на такую пленку с малой высоты точно по центру отпустить небольшой металлический шарик, то он будет многократно подпрыгивать, отражаясь от пленки, и эти отражения будут продолжаться достаточно долго. На самом деле, все зависит от самой пленки, от банки и от размеров шарика.

В некоторых случаях продолжительность подпрыгиваний будет доходить до одной минуты, а то и больше. Это значит, что потери энергии при каждом соударении шарика с пленкой крайне малы. Во всяком случае, мы наблюдаем, что при малой начальной высоте шарик устойчиво движется вдоль вертикальной оси отражающей поверхности.

Будем теперь постепенно увеличивать высоту, с которой отпускаем шарик. В некоторый момент, начиная с некоторой критической высоты $h_{\text{кр}}$, возникает неустойчивость. А именно, если начальная высота больше $h_{\text{кр}}$, то, как бы точно мы ни прицеливались по центру пленки, все равно после нескольких соударений шарик будет выброшен за пределы пленки. Это – то же самое явление неустойчивости, которое наблюдается в лазерном резонаторе. Чтобы разобраться с механизмом неустойчивости в этом случае и оценить величину критической высоты $h_{\text{кр}}$, перейдем от физической модели к компьютерной.

## Параболический гравитационный бильярд

Заменим сферическую поверхность резиновой пленки на идеальную отражающую параболическую пленку. «Идеальную» – это значит такую, что при соударениях с ней не происходит потери энергии шарика и угол падения равен углу отражения. Выбор же параболической формы пленки связан с тем, что для нее все расчеты оказывается намного проще, чем для сферической.

Для начала будем работать с отражающей параболой, заданной уравнением $y = x^2$. Компьютерный эксперимент показывает (рис.3), что в этом случае $h_{\text{кр}} = 0,25$. Но на высоте 0,25 как раз расположен оптический фокус параболы $y = x^2$ – пучок световых лучей, идущий параллельно вертикальной оси этой

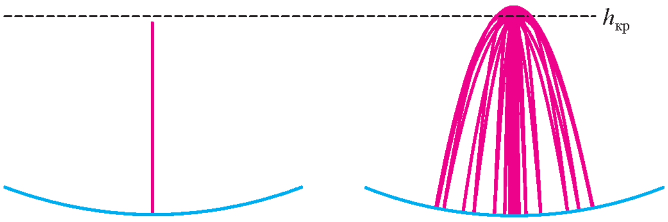



*Рис.3. Шарик отпускается с высоты $h_0$ с отклонением от оси 0,0001; слева $h_0 = 0{,}24$ – после 500 соударений, справа $h_0 = 0{,}26$ – после 20 соударений*

параболы, после отражения от нее собирается в этом фокусе.

Точно так же и для любой параболы $y = ax^2$ критическая высота, разделяющая устойчивые и неустойчивые осевые траектории, будет равна $h_{кр} = 1/4a$, что совпадает с высотой оптического фокуса такой параболы.

У сферического зеркала фокус расположен на расстоянии половины радиуса от вершины – именно там собираются параксиальные лучи, параллельные оси зеркала, после отражения. Наш компьютерный эксперимент говорит, что, по-видимому, для сферической отражающей пленки радиусом $R$ критическая высота, отделяющая устойчивые траектории от неустойчивых, будет равна $h_{кр} = R/2$.

### Механизм неустойчивости гравитационного бильярда

Запустим шарик так, чтобы он пролетел через фокус параболического бильярда (рис.4). Видно, что после

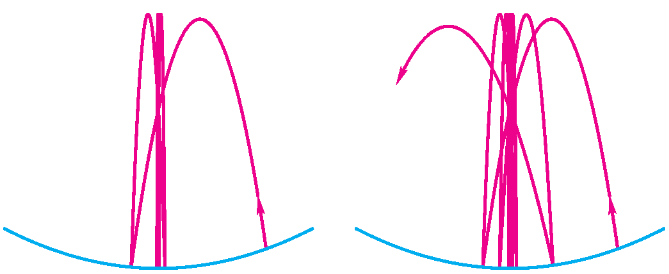


*Рис.4. Шарик все время проходит через фокус параболы и на начальном этапе траектории прижимается к ее оси; затем шарик начинает отталкиваться от оси, и его выбрасывает за пределы пленки*

каждого отражения он тоже проходит через фокус. И если он пролетел через фокус по нисходящей ветви параболы, как показано на рисунке 4 слева, то его траектория будет прижиматься к оси параболы. Но, как следует из рисунке 4 справа, в некоторый момент траектория шарика начинает отталкиваться от оси, и его выбрасывает за пределы пленки.

Правые части рисунков 3 и 4 говорят, по сути, об одном и том же: если приосевая – дальше мы будем говорить параксиальная – траектория шарика поднимается выше фокуса, то после нескольких соударений ее отбрасывает от оси. Наоборот, если параксиальная траектория целиком расположена ниже фокуса, то она все время остается вблизи оси (см. рис.3 слева). И здесь мы наблюдаем то же самое явление устойчивости/неустойчивости, что было описано в статье «Лазерный резонатор».

Выясним механизм появления неустойчивости в гравитационном параболическом бильярде.

- Компьютерный эксперимент показывает: если траектория шарика прошла через фокус, то после следующего соударения она снова пройдет через фокус. И если шарик прошел через фокус по нисходящей ветви параболы, то его траектория некоторое время будет притягиваться к оси бильярда. Итак, вблизи оси бильярда проходят траектории, которые к этой самой оси притягиваются.
- Подождем, пока такая траектория довольно сильно притянется к оси, и в какой-то момент времени обратим направление движения шарика. Шарик будет двигаться по той же самой траектории, но в обратном направлении. Новая траектория тоже будет проходить вблизи оси, но уже будет отталкиваться от нее.
- Таким образом, среди параксиальных траекторий, проходящих через фокус, есть и притягивающиеся и отталкивающиеся.
- Теперь остается учесть, что компьютерные вычисления происходят с ограниченной точностью. За счет ошибок округления, роль которых возрастает при приближении траектории к оси, происходит «пересадка» с притягивающейся траектории на отталкивающуюся, и шарик отбрасывается от оси бильярда.
- Можно еще сказать, что каждая параксиальная траектория, поднимающаяся выше фокуса, является «смесью» притягивающейся и отталкивающейся траекторий. За счет отталкивающей компоненты такая траектория в некоторый момент времени отбрасывается от оси бильярда, что и происходило в наших компьютерных (см. рис.3 и 4) и физических экспериментах.

А теперь перейдем к обещанной нами механической модели.

### Механическая модель лазерного резонатора

Если бы удалось выключить гравитацию и оказаться в условиях невесомости, то две расположенные друг против друга банки с движущимся между ними шариком могли бы послужить отличной механической моделью лазерного резонатора (рис.5). С помощью этой конструкции мы смогли бы, например, провести физический эксперимент по проверке критерия устойчивости лазерного резонатора.

А именно, лазерный резонатор с радиусами зеркал $R_1$, $R_2$ и расстоянием $L$ между ними *будет устой-*

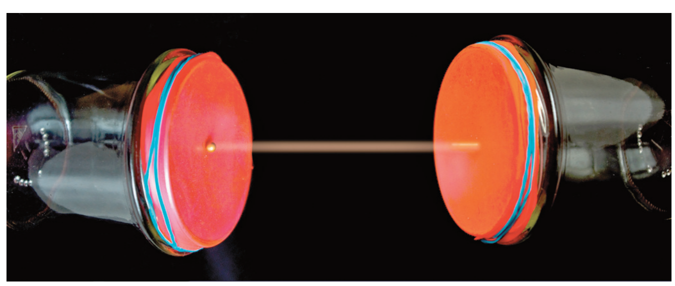


*Рис.5. Механическая модель лазерного резонатора*

*чивым, если*

$$\left(L-R_1\right)\left(L-R_2\right)\left(L-R_1-R_2\right)<0\,,$$

*и будет неустойчивым, если*

$$\left(L-R_1\right)\left(L-R_2\right)\left(L-R_1-R_2\right)\geq 0\,.$$

Под конец – два небольших добавления.

### Парабола против окружности

В какой-то момент нам пришлось заменить сферическую отражающую поверхность параболической, и при этом мы исходили из оптических соображений. Мы посчитали, что при такой замене оптические фокусы этих поверхностей должны совпадать. Посмотрим на другие соображения, позволяющие сделать правильную замену.

Будем считать, что плоское сечение параболической поверхности задается уравнением $y = ax^2$, а плоское сечение сферы задается уравнением $x^2 + (y-R)^2 = R^2$. Это – парабола и окружность, они касаются друг друга в начале координат. На рисунке 6 показано, что окружность большого радиуса имеет с параболой три общие точки, а окружность малого радиуса только одну – точку касания. Если мы начнем уменьшать радиус большой окружности, то ее точки пересечения с параболой будут сходиться к началу координат. Очевидно, что тот радиус $R$, при котором эти точки сольются с началом координат, и будет радиусом окружности, которая лучше всего приближает указанную параболу. Вычислим его.

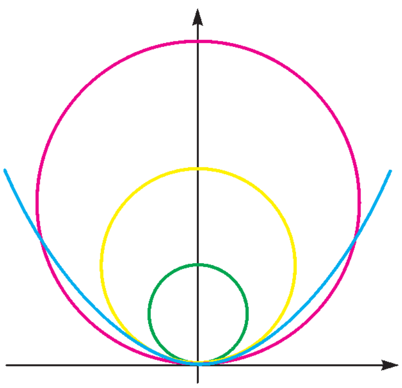


*Рис.6. Большая окружность слишком велика, маленькая – слишком мала*

Подставим $y = ax^2$ в уравнение окружности:

$$x^2 + \left(ax^2 - R\right)^2 = R^2\,.$$

После раскрытия скобок получим

$$x^2\left(a^2x^2 - \left(1-2aR\right)\right) = 0\,.$$

При больших $R$, когда $1-2aR<0$, это уравнение имеет четыре корня: $x_{1,2}=0$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{(1/a)-2R}$, что соответствует трем точкам пересечения. При малых $R$, когда $1-2aR>0$, уравнение имеет два корня: $x_{1,2}=0$, и в этом случае парабола и окружность имеют только одну общую точку – точку касания. Этот переход от одного случая к другому происходит, когда

$$1-2aR=0\,,\ \text{или}\ \frac{1}{4a}=\frac{R}{2}\,.$$

Но это как раз и есть условие совпадения оптических фокусов параболической и сферической отражающих поверхностей.

### Дополнительное задание

Оно предназначено для тех, кто собирается проводить компьютерные эксперименты по построению траекторий шарика в гравитационном параболическом бильярде. Для построения такой траектории нужно последовательно вычислять координаты $n$-й точки соударения $\left(x_n, y_n\right)$ и координаты вектора скорости $\left(u_n, v_n\right)$ непосредственно после этого соударения. Проверьте, что вдоль траектории шарика сохраняется величина

$$\frac{u_n^2}{2}+\frac{v_n^2}{2}+gy_n\,.$$

Это – просто-напросто закон сохранения энергии (здесь $g$ – ускорение свободного падения). Также сохраняется еще одна величина, а именно

$$2au_nx_n - v_n\,.$$

Такие сохраняющиеся величины называются интегралами бильярда. Таким образом, у параболического бильярда имеются два интеграла.

## ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

# История, полная загадок

**Л.ТКАЧЕВ**

Оказывается, космические лучи были открыты с помощью… школьного электроскопа. Еще в 1785 году Шарль Кулон представил три доклада по электричеству и магнетизму Французской академии наук. В одном из них он описал свои эксперименты, показавшие, что изолированные наэлектризованные тела спонтанно разряжаются и что качество изоляции не влияет на это явление. Прошло 50 лет, и Майкл Фарадей в 1835 году (а затем Уильям Крукс в 1879) обнаружил, что скорость разряда уменьшается, когда уменьшается давление воздуха: таким образом, непосредственной причиной разряда является ионизация воздуха. Но что ионизует воздух? Попытки ответить на этот вопрос и проложили путь к открытию в 1912 году космических лучей.

В 1896 году Анри Беккерель открыл спонтанную радиоактивность. Вскоре после этого было обнаружено, что заряженный электроскоп быстрее разряжается в присутствии радиоактивного материала, и скорость разряда электроскопа была использована для измерения уровня радиоактивности.

Около 1900 года Чарльз Вильсон и, независимо, Юлиус Элстер и Ганс Гейтель улучшили технику тщательной изоляции электроскопа в замкнутом сосуде и тем самым повысили его чувствительность. В 1901 году Вильсон сделал по тем временам фантастическое предположение о внеземной природе наблюдаемой радиации, имеющей исключительно высокую проникающую силу. Он провел исследования в туннелях, но не обнаружил уменьшения скорости ионизации, что

Чарльз Вильсон

противоречило его гипотезе, и она была забыта на многие годы. Эрнест Резерфорд и Генри Кук в 1903–1906 годах провели количественные измерения с электроскопом, защищенном металлическими стенками толщиной в несколько сантиметров, и убедились в том, что ионизация воздуха от такой защиты изменялась незначительно. Этот вывод был подтвержден измерениями другой группы ученых, которые погружали электроскоп в бак с водой. Возник очевидный вопрос о природе этой радиации: имеет ли она земное или внеземное происхождение.

Простейшей гипотезой было, что радиация связана с радиоактивными элементами в земной коре и в воздухе, о существовании которых стало известно после исследований естественной радиоактивности Марией и Пьером Кюри. Земная природа наблюдаемой радиации была общей точкой зрения, однако добиться экспериментальных доказательств оказалось нелегко. Так, были предприняты большие усилия, чтобы создать транспортабельный электроскоп в венской метеорологической группе, лидировавшей в то время в измерениях ионизации в атмосфере. Однако окончательная разработка такого инструмента принадлежит иезуитскому священнику и ученому Теодору Вульфу. В электроскопе Вульфа два металлических лепестка были заменены стеклянными проволочками, напыленными металлом и растянутыми пружинкой также из стекла. Показания электрометра считывались с помощью микроскопа. В 1909 году Вульф создал этот электрометр для измерения скорости образования ионов внутри герметически закрытого контейнера и использовал его, чтобы определить уровень радиации на верху Эйфелевой башни (300 м над землей). Придерживаясь гипотезы земного происхождения большей части ионизации, он ожидал увидеть существенное уменьшение ионизации на верху башни по сравнению с ее величиной на уровне земли. Однако уменьшение скорости ионизации оказалось слишком малым для подтверждения этой гипотезы.

Юлиус Элстер и Ганс Гейгель

Наблюдения Вульфа были загадочны и требовали объяснения. Одним из возможных путей решения этой загадки было проведение измерений на больших высотах. К тому времени баллонные эксперименты использовались уже более 100 лет для исследования атмосферного электричества на высотах до 7000 м, и было очевидно, что именно они могут дать ответ на вопрос происхождения проникающего излучения.

Метеоролог Франц Линке совершил 12 баллонных полетов в 1900–1903 годах, поднимаясь до высоты 5500 м с электроскопами конструкции Элстера и Гейтеля. Опубликованный им отчет заключался словами: «...на высоте 1 км ионизация меньше, чем на поверхности, между 1 и 3 км имеет то же самое значение и становится больше в 4 раза на высоте 5,5 км... Ошибки измерений позволяют сделать только заключение, что причина ионизации должна быть найдена прежде всего в Земле». Никто позднее не ссылался на Линке – по-видимому, потому, что он сделал правильные измерения, но пришел к неправильному выводу.

Карл Бергвитц – ученик Элстера и Гейтеля – поднялся в 1909 году на аэростате на высоту 1300 м и обнаружил, что величина ионизации уменьшилась на 24% по сравнению с величиной на земле. Однако его результат был подвергнут сомнениям ввиду того, что электрометр сломался во время полета.

Примерно в это же время аналогичные результаты были получены Алфредом Гокелем, который поднимался до высоты 3000 м. Именно он впервые ввел термин «космическая радиация».

В 1911 году Виктор Гесс совершил свои первые два баллонных полета. Для них были предоставлены аэростаты австрийской армии. Целью уже самого первого полета было исследование зависимости проникающего излучения, приводящего к разряду электроскопа, от высоты. Гесс достиг высоты около 1100 м и не обнаружил существенного изменения в интенсивности радиации по сравнению с измерениями на поверхности Земли. Однако это указывало на существование какого-то источника радиации в дополнение к гамма-лучам, возникающим при радиоактивных распадах в земной коре. Первые шесть полетов 1912 года проводились с базы вблизи Вены начиная с 17 апреля, когда происходило частичное солнечное затмение. Достигнув высоты 2750 м, Гесс не обнаружил уменьшения проникающей радиации во время затмения. Напротив, он получил указание на ее увеличение на высоте около 2000 м.

7 августа 1912 года состоялся последний из семи баллонных полетов Гесса, которые он совершил в течение 1912 года. В них использовались три электроскопа Вульфа. Один из электроскопов был открыт на воздух. С учетом уменьшения

давления этот электроскоп показал двукратное увеличение ионизации на высоте 4000 м по сравнению с ионизацией на поверхности Земли. Это было свидетельством того, что радиация попадает в атмосферу из внешнего пространства. Прежде чем доложить эти результаты, Гесс провел комбинированный анализ всех данных по своим полетам: на высотах выше 2000 м измеренный уровень радиации начинал расти; между 3000 и 4000 м количество ионов возросло на 4 пары; на высотах от 4000 до 5200 м увеличение достигало от 16 до 18 пар ионов. Выводы Гесса были такими: «Результаты представленных наблюдений наиболее легко могут быть объяснены в предположении, что излучение с очень высокой проникающей силой входит в нашу атмосферу сверху... Так как не обнаружено уменьшения излучения ни ночью, ни во время солнечного затмения, то трудно рассматривать Солнце в качестве источника этого излучения».

В 1913–1914 годах Вернер Кольстер подтвердил результаты и выводы Гесса, проведя измерения на высотах до 9200 м. Тогда же он обнаружил, что коэффициент поглощения космического излучения воздухом оказался в 8 раз меньше ожидаемого в случае, если бы это были гамма-лучи, однако не придал этому значения. Его последний полет состоялся в день начала первой мировой войны, надолго прервавшей исследования этого загадочного явления.

Итак, годом космической радиации является 1912 год. Виктор Гесс был удостоен Нобелевской премии «за открытие космических лучей» только в 1936 году. К тому времени его роль и фундаментальная важность этой «естественной лаборатории» стали очевидными. Термин «космические лучи» был введен в обращение Робертом Милликеном, который проводил измерения ионизации на больших глубинах и больших высотах. Он полагал, что первичные космические лучи являются гамма-лучами, т.е. энергичными фотонами, и предположил их рождение в межзвездной среде в результате слияния атомов водорода и превращения их в более тяжелые атомы. Однако в 1927 году Якоб Клей провел измерения космической ионизации на территории от острова Ява вблизи Австралии до города Генуя в Италии и обнаружил изменение интенсивности космических лучей в зависимости от широты, что было подтверждено и в других экспериментах. Уменьшение интенсивности космических лучей на экваторе указывало на то, что первичные космические лучи отклоняются геомагнитным полем и должны быть заряженными частицами, а не фотонами. В 1929 году Вальтер Боте и Вернер Кольхерстер обнаружили, что космические частицы способны пронизывать золотую пластину толщиной 4,1 см. Было очевидно, что это заряженные частицы.

Каков же знак заряда космических частиц? Бруно Росси в 1930 году предсказал различие между интенсивностями космических лучей, приходящих с востока и с запада, которое связано со знаком заряда первичных частиц. В нескольких независимых экспериментах было показано, что на самом деле интенсивность больше с запада, т.е. бóльшая часть первичных частиц являются положительными. Проводя свои эксперименты, Росси открыл широкие атмосферные ливни частиц, но не изучил это явление в деталях. Позднее, в 1938 году, эти ливни, возникающие в результате взаимодействия первичных лучей с ядрами атомов атмосферы, были переоткрыты и изучены Пьером Оже. Во многих исследованиях с 1930 по 1945 год было показано, что первичные космические лучи являются в основном протонами, а вторичная радиация, возникающая в атмосфере, вызывается по большей части электронами, фотонами и мюонами. В 1948 году наблюдения с ядерной эмульсией, поднятой баллонами почти на границу атмосферы, показали, что приблизительно 10% первичных частиц – это ядра гелия

*Заинтересованная общественность провожает Виктора Гесса в один из первых баллонных полетов*

($\alpha$-частицы) и 1% – это ядра более тяжелых элементов, таких как углерод, железо и свинец.

Загадка происхождения космических лучей не решена до конца по сию пору. В 1933 году Фриц Цвики и Вальтер Бааде первыми высказали гипотезу о том, что космические лучи рождаются при вспышках сверхновых звезд, которые, по современным представлениям, происходят при коллапсе звезд после выгорания всего термоядерного топлива. Эта гипотеза получила различные теоретические и экспериментальные обоснования, в том числе с помощью измерения нейтринного сигнала от вспышки сверхновой 1987 года, произошедшей в Большом Магеллановом облаке – спутнике нашей галактики Млечный путь.

Первые наблюдения треков релятивистских частиц из атмосферы провел Дмитрий Скобельцын. Им было показано, что импульсы этих заряженных частиц так высоки, что они не могут быть продуктами распада радиоактивных элементов. Скобельцын обнаружил также, что такие объекты часто появляются в камере Вильсона группами по несколько частиц. Это стало первым наблюдением ливней космических лучей.

Ученик Дмитрия Скобельцына Сергей Вернов разработал новый метод стратосферных исследований с помощью шаров-радиозондов, чем заложил принципиально новую экспериментальную базу для исследований. В 1935 году он выполнил измерения первичного космического излучения на высоте 13,6 км, используя счетчики Гейгера.

В 1932 году Карл Андерсон экспериментально обнаружил в космических лучах частицы, которые ведут себя, как электроны, но имеющие положительный электрический заряд. Так был открыт позитрон. «За открытие позитрона» Андерсон в 1936 году получил Нобелевскую премию.

После открытия позитрона космические лучи долгое время оставались фабрикой новых открытий. Так, в 1937 году был открыт мюон ($\mu$-мезон), в 1947 – пион ($\pi$-мезон) и каон (K-мезон), в 1951 – $\Lambda$-гиперон и т.д. В 1965 году было экспериментально подтверждено существование реликтового микроволнового излучения, теоретически предсказанного Джорджем Гамовым в рамках теории Большого взрыва.

# Задачи по математике и физике

***Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.***

***Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3–2013» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2301» или «Ф2308». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно.***

***Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).***

***В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.***

***Задача М2302 предлагалась на XI Устной олимпиаде по геометрии, задача М2305 – на VII Южном математическом турнире, задачи М2306 и М2307 – на международной олимпиаде Romanian Masters of Mathematics 2013.***

## Задачи М2301–М2308, Ф2308–Ф2314

**М2301.** Дана числовая последовательность 1, −2, −3, 4, 5, 6, −7, −8, −9, −10, 11, 12, 13, 14, 15, −16, … (эта последовательность получается из последовательности 1, 2, 3, 4, … расстановкой знаков: одно число со знаком «+», затем два числа со знаком «−», три числа со знаком «+», четыре числа со знаком «−», и т.д.). Докажите, что существует бесконечно много натуральных $n$ таких, что сумма первых $n$ членов этой последовательности равна 0.

*В.Расторгуев*

**М2302.** Внутри угла $AOD$ проведены лучи $OB$ и $OC$, причем $\angle AOB = \angle COD$. В углы $AOB$ и $COD$ вписаны непересекающиеся окружности. Докажите, что точка пересечения общих внутренних касательных к этим окружностям лежит на биссектрисе угла $AOD$.

*Ф.Нилов*

**М2303.** На бесконечной клетчатой плоскости клетки раскрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке. Дан многоугольник периметра $P$ и площади $S$, все стороны которого идут по линиям сетки. Докажите, что этот многоугольник содержит не более $\frac{S}{2}+\frac{P}{2}$ черных клеток.

*А.Магазинов*

**М2304.** Через $s(n)$ обозначим сумму цифр в двоичной записи натурального числа $n$. Например, $s(2013) = 9$, поскольку 2013 имеет двоичную запись 11111011101 (т.е. $2013 = 2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^4+2^3+2^2+2^0$). Натуральное число $n$ назовем *счастливым*, если $s(n) = s(3n)$.

а) Докажите, что существует бесконечно много пар подряд идущих счастливых чисел.

б) Докажите, что не существует трех подряд идущих счастливых чисел.

*А.Устинов*

**М2305.** По кругу расставлены 99 положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$. Известно, что если выбрать из них несколько чисел, среди которых нет двух соседних, то их сумма будет меньше, чем сумма оставшихся чисел. Докажите, что существует единственный (с точностью до движения) описанный 99-угольник, последовательные стороны которого равны $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$.

*Л.Емельянов*

**М2306*.** Для натурального числа $a$ определим последовательность целых чисел $x_1, x_2, \ldots$ следующим образом: $x_1 = a$, $x_{n+1} = 2x_n + 1$ при $n \geq 1$. Положим $y_n = 2^{x_n} - 1$. Найдите наибольшее возможное $k$ такое, что для некоторого натурального $a$ каждое из чисел $y_1, \ldots, y_k$ является простым.

*В.Сендеров*

**М2307*.** В вершинах правильного $2n$-угольника расставлены $2n$ различных фишек так, что в каждой вершине стоит ровно одна фишка. *Ход* состоит в следующем: выбирается одна из сторон $2n$-угольника и две фишки, находящиеся в концах этой стороны, меняются местами друг с другом. После конечного числа ходов оказалось, что каждая пара фишек менялась местами ровно один раз. Докажите, что некоторая сторона $2n$-угольника не выбиралась ни разу.

*А.Грибалко*

**М2308*.** Дан описанный четырехугольник $ABCD$. Окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ вписаны в треугольники $ABC$ и $ADC$ соответственно.

а) Диагональ $BD$ пересекает окружность $\omega_1$ в точках $E$ и $P$, а окружность $\omega_2$ – в точках $F$ и $Q$ так, что точки

$P$ и $Q$ лежат на отрезке $EF$. Докажите, что касательная к $\omega_1$, проведенная в точке $E$, и касательная к $\omega_2$, проведенная в $F$, пересекаются на прямой $AC$ или параллельны.

б) Окружность $\Omega$ касается окружностей $\omega_1$ и $\omega_2$ внутренним образом в точках $K$ и $L$ соответственно. Докажите, что прямые $BK$ и $DL$ пересекаются на прямой $AC$.

*С.Ильясов, И.Богданов*

**Ф2308.** На поиски упавшего самолета за месяц поисков было израсходовано 30 миллионов рублей, в поисках участвовали сотни людей, а упавший самолет так и не нашли. Через год он был обнаружен случайно на расстоянии $L = 10$ км от аэродрома, с которого взлетел и на который намеревался вернуться. Один час полета беспилотного летательного аппарата – БПЛА – стоит 1 тысячу рублей. За светлое время суток такой самолет может отработать до 8 часов. Самолет летит со скоростью $v = 100$ км/ч на высоте $H = 1$ км и производит съемку местности видеокамерой с углом обзора $\alpha = 60°$ (по 30° вправо и влево). Как скоро можно было бы обнаружить пропавший самолет с помощью БПЛА и в какую сумму обошлись бы поиски?

*С.Беспилотник*

**Ф2309.** Шестеренчатый насос (рис.1) предназначен для перекачки масла под давлением и передачи мощности к гидравлическим механизмам. Число зубьев каждой шестерни $N = 10$, высота зубьев $h = 1$ см. Каждый зуб имеет форму, близкую к правильному (равностороннему) треугольнику. Ширина шестерен $L = 3$ см, расстояние $d$ от вершин зубьев до стенок корпуса весьма мало: $d = 10^{-4}$ м. Шестерни вращаются с частотой $f = 25$ Гц. Считая масло несжимаемым, маловязким и имеющим плотность $\rho = 10^3$ кг/м$^3$, найдите теоретическую максимальную мощность, которую может передать этот насос к потребителям (гидравлическим механизмам), а также теоретическую максимальную разницу давлений на выходе и на входе насоса.

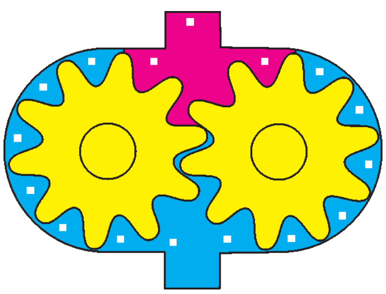


Рис. 1

*С.Дмитриев*

**Ф2310.** На горизонтальной поверхности стола разлито масло, которое образует тонкий слой толщиной $d = 1$ мм. Поверх масла лежит тонкий лист бумаги размером $a \times a = 1 \times 1$ м. Одна из сторон квадратного листа бумаги немного выступает за край стола и параллельна ему. Бумага сначала неподвижна. Выступающую часть бумаги потянули с силой $F = 1$ Н, направленной горизонтально и перпендикулярно этому краю стола. Через какое время за край стола будет выступать половина листа бумаги? Вязкость масла $\eta = 1$ Па·с.

*В.Сергеев*

**Ф2311.** Воздушный шарик с тонкой резиновой оболочкой имеет в воздухе при температуре 0 °С объем $V = 1$ л. Этот шарик опускают в глубокий сосуд с горячей водой при температуре 90 °С на глубину $H = 2$ м. Какую максимальную и какую минимальную работу при таком перемещении может совершить при нагревании воздух, содержащийся в шарике? Температура газа не убывает, а глубина погружения шарика в воду не уменьшается. Давлением, создаваемым резиновыми стенками шарика, можно пренебречь, атмосферное давление нормальное: $p = 10^5$ Па.

*С.Крюков*

**Ф2312.** В электрической схеме (рис.2) все элементы идеальные, ток равен нулю. Ключ сначала замыкают, а затем размыкают в момент, когда скорость изменения энергии, запасаемой в катушке индуктивности, достигает максимума. Найдите:

а) количество теплоты, которое выделится в схеме после размыкания ключа;

б) отношение токов в резисторах за мгновение до размыкания ключа.

*А.Шеронов*

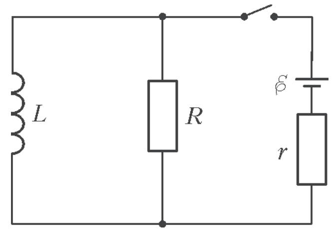


Рис. 2

**Ф2313.** Над стоящим на горизонтальном столе тонкостенным стаканом цилиндрической формы, заполненным до половины молоком, поместили собирающую линзу. Ось симметрии стакана совпадает с главной оптической осью линзы. Диаметр изображения дна стакана совпадает с диаметром дна самого стакана, а высота изображения больше высоты самого стакана в два раза. Какую часть объема занимает изображение молока в изображении стакана?

*С.Варламов*

**Ф2314.** Монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм падает перпендикулярно на непрозрачную пластину, в которой прорезана длинная щель постоянной ширины $D = 0{,}1$ мм $\gg \lambda$. На экране, расположенном на расстоянии $L = 10$ м $\gg D^2/\lambda$ параллельно пластине, видны дифракционные полосы разных порядков. Каково отношение интенсивностей/яркостей света в центрах полос для разных порядков $n$ и $m$? Считайте, что $1 \ll n < m \ll D/\lambda$.

*Ф.Ренель*

## Решения задач М2286–М2293, Ф2293–Ф2299

**М2286.** *В числе не меньше 10 разрядов, в его записи используются только две разные цифры, причем одинаковые цифры не стоят рядом. На какую наибольшую степень двойки может делиться такое число?*

**Ответ**: на шестую.

Отщепим от числа из условия «хвост» из последних 8 цифр. Разность числа и его «хвоста» оканчивается на 8 нулей, поэтому делится на $2^8$. А «хвост» имеет вид $\overline{abababab} = \overline{ab} \cdot 1010101$, где $a$ и $b$ – цифры. Ясно, что двойки в разложении «хвоста» на простые множители появляются только из числа $\overline{ab}$. Наибольшая степень двойки, на которую оно может делиться, не более шестой ($2^7 = 128$ уже трехзначное). Тогда и исходное число делится не более чем на 6-ю степень двойки. Примером такого числа является число 6464646464.

*Замечание.* В приведенном рассуждении отщепление «хвоста» из 6 цифр $\overline{ababab}$ недостаточно, так как сумма числа, оканчивающегося на 6 нулей, и такого «хвоста» может делиться на $2^7$ (возьмем, например, число 1646464).

*Л.Медников, А.Шаповалов*

**M2287.** *В классе 20 школьников. Для них организовано несколько экскурсий.*

*а) Известно, что в каждой экскурсии участвовал хотя бы один школьник. Докажите, что найдется экскурсия, каждый из участников которой посетил не менее 1/20 всех экскурсий.*

*б) Известно, что в каждой экскурсии участвовали хотя бы четверо. Докажите, что найдется экскурсия, каждый из участников которой посетил не менее 1/17 всех экскурсий.*

Пусть число экскурсий равно $n$, и каждый школьник сохранил билеты со всех экскурсий, в которых участвовал.

а) Назовем школьника *беднягой,* если он побывал меньше чем на $n/20$ экскурсиях. Отметим билеты всех бедняг. Всего отмечено меньше $20 \cdot n/20 = n$ билетов, поэтому найдется экскурсия, ни один билет на которую не отмечен. Значит, в ней бедняги не участвовали, что и требовалось доказать.

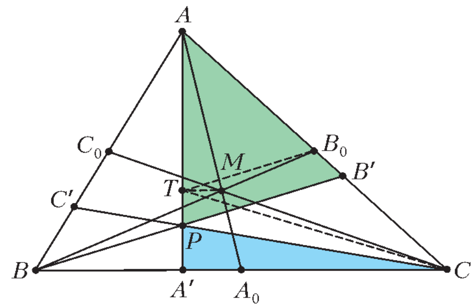
б) Теперь назовем школьника *беднягой*, если он принял участие менее чем в $n/17$ экскурсиях. Снова отметим билеты всех бедняг. Допустим, что в каждой экскурсии хотя бы один из билетов отмечен. Тогда отмечено не менее $n$ билетов, вклад каждого бедняги меньше $n/17$ билетов, значит, бедняг больше 17. Выберем из них ровно 17. У выбранных 17 бедняг всего меньше $17 \cdot n/17 = n$ билетов, у каждого из остальных трех школьников – не более чем по $n$ билетов, поэтому всего билетов меньше $4n$. С другой стороны, по условию на каждую из $n$ экскурсий продано не менее 4 билетов. Противоречие.

*Л.Медников, А.Шаповалов*

**M2288.** *На сторонах треугольника ABC взяты точки $A'$, $B'$, $C'$ так, что отрезки $AA'$, $BB'$, $CC'$ пересекаются в одной точке P. Известно, что площади треугольников $AB'P$, $BC'P$, $CA'P$ равны. Докажите, что P является точкой пересечения медиан треугольника ABC.*

Проведем медианы $AA_0$, $BB_0$, $CC_0$ и отметим их точку пересечения $M$. (Как известно, площади треугольников $AMB_0$, $AMC_0$, $BMC_0$, $BMA_0$, $CMA_0$, $CMB_0$ равны.)

Тогда точка $P$ лежит в одном из треугольников $ABM$, $BCM$, $CAM$. Пусть, для определенности, это треугольник $BCM$ (см. рисунок). Предположим, что $P \neq M$, и докажем, что $S_{CA'P} < S_{AB'P}$




в противоречие с условием задачи.

Проведем через $M$ прямую, параллельную $BC$, пусть она пересекает $AA'$ в точке $T$. Тогда $AT : A'T = AM : A_0M = 2$. По построению, $T$ лежит на отрезке $AP$, и, значит, $S_{CA'P} < S_{CA'T} = \frac{1}{2} S_{CAT}$ (в треугольниках $CA'T$ и $CAT$ основания $A'T$ и $AT$ относятся как 1 к 2, а высота к этим основаниям – общая). Далее, так как $B_0$ принадлежит отрезку $AB'$, имеем $S_{AB'P} > S_{AB_0T} = \frac{1}{2} S_{CAT}$. Итак, $S_{CA'P} < \frac{1}{2} S_{CAT} < S_{AB'P}$, что завершает доказательство.

Помимо предложенного синтетического решения имеются и вычислительные подходы. Еще один красивый подход к решению этой задачи см. в статье В.Расторгуева «Равные площади и повороты».

*П.Кожевников*

**M2289.** *В некоторых клетках квадрата 11×11 стоят плюсы, причем всего плюсов четное количество. В каждом квадратике 2×2 тоже четное число плюсов. Докажите, что четно и число плюсов в 11 клетках главной диагонали квадрата.*

Ступенчатая фигура $A$ в левом верхнем углу (рис.1) состоит из 15 квадратиков $2 \times 2$, поэтому в ней четное число плюсов. То же верно для фигуры $B$, которая симметрична фигуре $A$ относительно центра квадрата. Каждая из клеток квадрата вне диагонали покрыта фигурами $A$ и $B$ один раз, а каждая клетка диагонали – 0 или 2 раза (рис. 2). Сумма числа плюсов в верхней и в нижней фигуре четна, при этом плюсы в клетках с цифрой 2 учтены дважды и дают, тем самым, четный вклад. Значит, и число плюсов вне диагонали четно. А

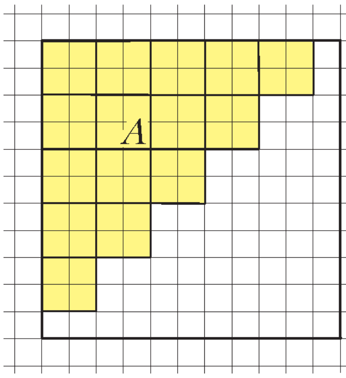



Рис. 1

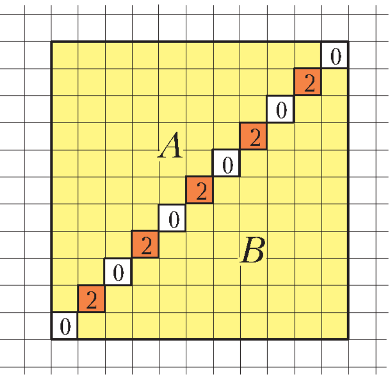



Рис. 2

так как четно общее число плюсов, то и на диагонали число плюсов четно.

*Л.Медников, А.Шаповалов*

**M2290.** *Пусть $C(n)$ – количество различных простых делителей числа n.*
*а) Конечно или бесконечно число таких пар натуральных чисел $(a, b)$, что $a \ne b$ и $C(a+b) = C(a) + C(b)$?*
*б) А если при этом дополнительно требуется, чтобы $C(a+b) > 1000$?*

а) **Ответ**: бесконечно.

Например, подходят все пары вида $\left(2^n, 2^{n+1}\right)$. Здесь $C(a) = C(b) = 1$, $C(a+b) = C\left(3 \cdot 2^n\right) = 2$.

б) **Ответ**: бесконечно.

Рассмотрим число $P$, равное произведению $p_1 p_2 \ldots p_n$ первых $n$ простых чисел ($n > 1000$). $P$ – наименьшее число, у которого $n$ простых делителей, в частности $C(P-1) < n$, и тогда $C(1) + C(P-1) = C(P-1) < C(P)$. Положим $C(P-1) = n-k$. Рассмотрим число $Q$, равное произведению некоторых $k$ различных простых чисел, каждое из которых больше $p_n$ и всех простых делителей числа $P-1$. Возьмем $a = Q$, $b = (P-1)Q$. Имеем $C(a) = k$, $C(b) = n$, $C(a+b) = C(PQ) = n+k$. Варьируя простые числа, входящие в разложение $Q$, получим бесконечное множество искомых пар.

*Л.Медников, А.Шаповалов*

**M2291.** *По окружности длины 1 начали движение n точечных шариков. Каждый шарик имеет скорость 1, причем k шариков движутся по часовой стрелке, а остальные n – k движутся против часовой стрелки. Если два шарика сталкиваются, то они разлетаются в противоположные стороны так, что их скорости остаются равными 1. Докажите, что найдется число t (зависящее только от n и k, но не от начального положения) такое, что через время t после начала движения каждый шарик займет свое начальное положение, и найдите наименьшее такое t.*

**Ответ**: $t = \dfrac{n}{\text{НОД}(n, 2k)}$.

Случаи $n \le 2$ разбираются легко. Пусть $n > 2$.

Заметим, что за промежуток времени, равный 1, шарик при движении по окружности без столкновений сделает один полный оборот.

Предположим вначале, что шарики неотличимы, тогда можно считать, что столкновений не происходит (т.е. в момент столкновения шарики «пролетают» друг сквозь друга), и, значит, через промежуток времени, равный целому числу, начальное положение шариков будет повторено.

С другой стороны, нетрудно задать начальное расположение (неотличимых) шариков так, чтобы через нецелый промежуток времени начальная позиция не могла повториться – скажем, взять в начальном положении пару шариков, двигающихся в одном направлении на малом (по сравнению с другими расстояниями между парами шариков) расстоянии друг от друга. Отсюда ясно, что ответом в задаче может являться только целое число.

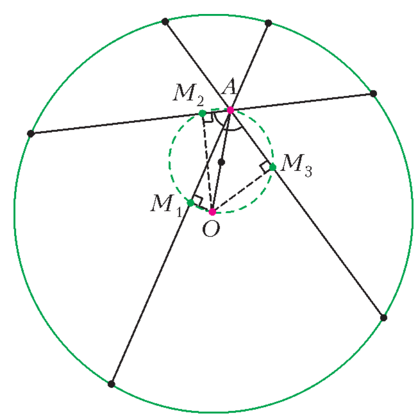
Теперь вспомним, что шарики различны, занумеруем их в порядке обхода по часовой стрелке и обозначим через $T_1, T_2, \ldots, T_n$ соответственно точки окружности, являющиеся начальными положениями шариков. Пусть через промежуток времени $t$ после начала движения (считаем $t$ натуральным) первый шарик попал в точку $T_{m+1}$ (здесь и далее индексы, отличающиеся на число, кратное $n$, считаем одинаковыми), пройдя по часовой стрелке дугу $T_1 T_{m+1}$ и $l$ полных оборотов (возможно, $l < 0$, что соответствует оборотам против часовой стрелки). В процессе соударений циклический порядок шариков не изменяется, значит, через время $t$ шарик номер $i$ попадет в $T_{i+m}$, пройдя дугу $T_i T_{i+m}$ и $l$ полных оборотов ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Подсчитаем двумя способами суммарное перемещение $S$ всех шариков в направлении часовой стрелки за время $t$. С одной стороны, $k$ шариков двигаются со скоростью 1 и $(n-k)$ шариков – со скоростью $-1$, откуда $S = t\left(k - (n-k)\right) = t(2k-n)$. С другой стороны, $S$ равно сумме дуг $T_i T_{i+m}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $ln$ полных оборотов. Дуги $T_i T_{i+m}$ покрывают окружность в $m$ слоев, т.е. их суммарная длина равна $m$, откуда $S = m + nl$. Имеем $S = t(2k-n) = m + nl$, откуда $m \equiv 2kt \pmod{n}$. Условие возвращения каждого шарика на свое место эквивалентно тому, что $m$ делится на $n$, или $2kt$ делится на $n$. Отсюда минимальное время возвращения определяется как $t = \dfrac{n}{\text{НОД}(n, 2k)}$.

*П.Кожевников*

**M2292.** *а) Внутри окружности находится правильный 2n-угольник ($n \ge 2$), его центр A не обязательно совпадает с центром окружности. Лучи, выпущенные из A в вершины 2n-угольника, высекают 2n точек на окружности. Затем 2n-угольник повернули так, что его центр остался на месте. Теперь лучи высекают 2n новых точек. Докажите, что их центр масс совпадает с центром масс старых 2n точек.*

*б*) Внутри сферы находится икосаэдр, его центр A не обязательно совпадает с центром сферы. Лучи, выпущенные из A в вершины икосаэдра, высекают 12 точек на сфере. Икосаэдр повернули так, что его центр остался на месте. Теперь лучи высекают 12 новых точек. Докажите, что их центр масс совпадает с центром масс старых 12 точек.*




а) Продолжив главные диагонали $2n$-угольника, получим $n$ хорд, проходящих через точку $A$, таких, что углы между соседними хордами равны по $180°/n$ (см. рисунок). Центр масс концов хорд совпадает с центром масс середин этих хорд – точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Каждая середина $M_i$ является проекцией центра $O$ окружности на соответствующую хорду, значит, точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$ лежат на окружности $s$ с диаметром $OA$. Из равенства вписанных углов следует, что все точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$ делят окружность $s$ на равные дуги, поэтому их центр масс находится в центре окружности $s$, т.е. в середине отрезка $AO$.

б) Рассмотрим середины $M_1, \ldots, M_6$ шести хорд $l_1, \ldots, l_6$, проходящих через $A$ и являющихся продолжениями диагоналей икосаэдра. Аналогично пункту а), достаточно доказать, что центр масс $Q$ точек $M_1, \ldots, M_6$ не зависит от выбора икосаэдра. Положим $\overrightarrow{AO} = \vec{a}$ (далее вектор $\vec{a}$ будем считать переменным) и $f(\vec{a}) = \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AM_1} + \ldots + \overrightarrow{AM_6}\right)$. Покажем, что $f(\vec{a}) = \alpha\vec{a}$, где $\alpha$ – некоторая константа; отсюда сразу последует решение.

Заметим, что $\overrightarrow{AM_i}$ – проекция вектора $\vec{a}$ на прямую $l_i$, и, значит, $6f(\vec{a})$ – это сумма проекций вектора $\vec{a}$ на прямые $l_1, \ldots, l_6$.

Пусть $\vec{e}_i$ – единичный направляющий вектор прямой $l_i$. Из симметрии икосаэдра получим $f(\vec{e}_1) = \alpha\vec{e}_1$. (Действительно, икосаэдр переходит в себя при повороте вокруг оси $l_1$ на угол $\frac{2\pi}{5}$, поэтому сумма проекций вектора $\vec{e}_1$ на остальные диагонали $l_2, \ldots, l_5$ является вектором, который также переходит в себя при этом повороте.) Аналогично рассуждая, получаем $f(\vec{e}_2) = \alpha'\vec{e}_2$, причем из симметрии икосаэдра $\alpha' = \alpha$. (Действительно, это следует из наличия движения, которое переводит икосаэдр в себя: при нем $l_1$ переходит в $l_2$, это движение переставляет некоторым образом прямые $l_1, l_2, \ldots, l_6$.) Таким же образом, $f(\vec{e}_3) = \alpha\vec{e}_3$.

Так как операция проектирования линейна, то отображение $f$ также линейно, т.е. для любых векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и числа $\lambda$ выполнено $f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$, $f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$. Произвольный вектор $\vec{a}$ разложим по некомпланарным векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$: $\vec{a} = \mu_1\vec{e}_1 + \mu_2\vec{e}_2 + \mu_3\vec{e}_3$. Тогда

$$f(\vec{a}) = \mu_1 f(\vec{e}_1) + \mu_2 f(\vec{e}_2) + \mu_3 f(\vec{e}_3) = \mu_1\alpha\vec{e}_1 + \mu_2\alpha\vec{e}_2 + \mu_3\alpha\vec{e}_3 = \alpha\vec{a},$$

что и требовалось.

*Замечание*. Утверждение, аналогичное задаче б), можно доказать и для правильного октаэдра, куба, додекаэдра.

*Л.Медников, А.Шаповалов*

**М2293.** *Петя и Вася играют в игру, правила которой таковы. Петя загадывает натуральное число x с суммой цифр 2012. За один ход Вася выбирает любое натуральное число a и узнает у Пети сумму цифр числа |x − a|. Какое минимальное число ходов необходимо сделать Васе, чтобы гарантированно определить x?*

**Ответ**: 2012 ходов.

Обозначим через $S(n)$ сумму цифр числа $n$.

*Алгоритм.* Первым ходом Вася называет 1. Если число $x$ оканчивается на $k$ нулей, то $S(x-1) = 2011 + 9k$. Таким образом Вася узнает положение самой правой ненулевой цифры в $x$. Положим $x_1 = x - 10^k$. Вася знает, что $S(x_1) = 2011$. Подобрав на втором ходу число $a$ так, чтобы $x - a = x_1 - 1$, Вася узнает, сколько нулей в конце $x_1$. Пусть их $m$. Положим $x_2 = x_1 - 10^m$. Тогда $S(x_2) = 2010$. Подобрав на третьем ходу число $a$ так, чтобы $x - a = x_2 - 1$, Вася узнает, сколько нулей в конце $x_2$, и т.д. После 2012 хода он получит $S(x_{2012}) = 0$ и тем самым найдет число $x$.

*Оценка.* Пусть Петя признался, что в записи числа $x$ есть только нули и единицы, т.е. $x = 10^{k_{2012}} + 10^{k_{2011}} + \ldots + 10^{k_1}$, где $k_{2012} > k_{2011} > \ldots > k_1$. Тогда задача Васи сводится к выяснению значений показателей $k_i$. Пусть Васе не везет, и на $i$-м ходу оказывается, что $10^{k_i}$ больше предъявленного Васей числа $a$. Тогда, независимо от значений $k_{2012}, \ldots, k_{i+1}$, $S(x-a) = S\left(10^{k_i} - a\right) + (2012 - i)$. Тем самым, о значениях $k_{2012}, \ldots, k_{i+1}$ ничего не известно (кроме того, что все они больше $k_i$). В частности, после 2011 ходов может остаться неизвестным точное значение $k_{2012}$.

*С.Сафин*

**Ф2293.** *Внутри сферической колбы с внутренним диаметром D = 8 см находится разреженный газ, состоящий из одинаковых молекул. Каково среднее значение расстояния от центра колбы до молекул газа (гравитацией можно пренебречь)?*

Выделим маленький телесный угол $\Omega$ с вершиной в центре колбы. В объеме колбы, ограниченном этим телесным углом, находится много молекул с одинаковыми массами, которые распределены по объему равномерно. Найдем положение центра масс этого выделенного объема:

$$\vec{R} = \frac{m\sum\vec{R}_k}{mk} = \frac{\sum\vec{R}_k}{k}.$$

Все векторы начинаются в центре колбы и при малом значении телесного угла почти совпадают по направлению. Таким образом, центр масс этого участка объема находится как раз на среднем расстоянии от центра колбы до всех молекул. При удалении от центра колбы на $x$ и смещении на $\Delta x$ к объему добавляется порция $\Omega x^2\Delta x$. Вклад этой порции объема в сумму $\frac{\Sigma\vec{R}_k}{k}$ равен $\frac{\Omega x^3\Delta x}{V}$. Просуммировав (проинтегрировав) все вклады на всех интервалах от $x = 0$ до $x = \frac{D}{2}$, получим $\frac{\Omega(D/2)^4}{4V}$. Объем выделенной части равен $\frac{\Omega(D/2)^3}{3}$, следовательно, среднее расстояние от центра до молекул в шаре (колбе) равно

$$R_{\text{ср}} = \frac{3}{4}\frac{D}{2} = \frac{3D}{8} = 3\text{ см}.$$

*С.Варламов*

**Ф2294.** *К 1 апреля часовщик из деталей старых часов разных конструкций и из шестеренок разных разме-*

*ров собрал механизм, в котором три стрелки – часовая, минутная и секундная – вращались «по часовой стрелке» с разными угловыми скоростями $\omega_ч < \omega_м < \omega_с$. При установке всех стрелок на 12:00 и запуске механизма выяснилось следующее: а) каждый раз, когда часовая стрелка проходила отметку 12:00, ее обязательно обгоняли обе другие (минутная и секундная) стрелки; б) каждый раз, когда часовую стрелку обгоняла только секундная, все стрелки вытягивались вдоль одной прямой линии; в) часовая стрелка за 1 час сделала 5 оборотов. Какое минимальное число оборотов за это время могла сделать минутная стрелка и сколько раз при этом повернулась секундная стрелка?*

Разности угловых скоростей $\omega_с - \omega_ч$ и $\omega_м - \omega_ч$ отличаются ровно в два раза. Кроме того, эти разности угловых скоростей таковы, что $(\omega_м - \omega_ч)/\omega_ч = N$, где $N$ – целое положительное число. Минимальное число $N = 1$. Следовательно, $\omega_м = 2\omega_ч$ и $\omega_с = 3\omega_ч$. Таким образом, минутная стрелка за 1 час сделает 10 оборотов, а секундная – 15 оборотов.

*С.Часовщик*

**Ф2295.** *На горизонтальной шероховатой поверхности находится маленькая плоская шайба. Коэффициент трения шайбы о поверхность $\mu$ = 0,5. Если подействовать на покоившуюся шайбу постоянной горизонтальной силой F = 10 Н, то шайба будет двигаться по поверхности прямолинейно и поступательно с ускорением $a = \mu g = 5$ м/с$^2$. Какой минимальной по модулю силой можно заставить эту же шайбу двигаться поступательно по той же горизонтальной поверхности с ускорением, равным по модулю a?*

В условии задачи есть подсказка: «с ускорением, равным по модулю…», т.е. движение не обязательно прямолинейное. Поэтому придется сравнить минимальные величины сил для прямолинейного и криволинейного движений. Понятно, что минимальная по модулю сила должна быть направлена не горизонтально. Будем решать задачу в двух вариантах. 1) Сначала приложим к шайбе такую минимальную силу, при которой шайба будет скользить по поверхности с постоянной скоростью, а затем изменим горизонтальную составляющую этой силы так, чтобы шайба двигалась по поверхности по окружности с ускорением, равным по модулю $a$. 2) Найдем минимальную силу, которая нужна, чтобы выполнить условие задачи при прямолинейном движении шайбы.

Из условия задачи следует, что выполняется равенство

$$ma = F - \mu mg.$$

Значит, масса шайбы равна

$$m = \frac{F}{a + \mu g} = 1 \text{ кг}.$$

1) Направим силу $\vec{f}$, приложенную к шайбе, под некоторым углом $\beta$ к горизонту. Найдем минимальное значение этой силы, при котором шайба будет двигаться с постоянной скоростью. В проекциях на горизонтальное и вертикальное направления уравнение равномерного движения шайбы имеет вид

$$f\cos\beta = \mu N \quad \text{и} \quad mg = f\sin\beta + N,$$

где $N$ – сила нормальной реакции поверхности. Отсюда находим

$$f = \frac{\mu mg}{\cos\beta + \mu\sin\beta}.$$

Минимальное значение модуля силы $f$, обеспечивающей равномерное движение, достигается при угле $\beta = \operatorname{arctg}\mu$ и равно

$$f_{\min} = \frac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2}} \approx 4{,}47 \text{ Н}.$$

Для того чтобы шайба двигалась поступательно с ускорением, равным по модулю $a$, нужно, чтобы горизонтальная проекция суммы всех сил, действующих на шайбу, была равна $ma$. Но такое движение вовсе не обязано быть прямолинейным. Например, можно заставить шайбу двигаться поступательно по окружности радиусом $R$ с некоторой постоянной по величине скоростью $v$ и при этом обеспечить равенство $v^2/R = a$. В этом случае минимальная сила, с которой нужно действовать на шайбу, равна по величине

$$f'_{\min} = \sqrt{(ma)^2 + f_{\min}^2} \approx 6{,}71 \text{ Н}.$$

2) Теперь рассмотрим прямолинейное движение шайбы с нужным по величине ускорением. В проекциях на горизонтальное и вертикальное направления уравнение движения шайбы примет вид

$$f_1\cos\beta - \mu N = ma \quad \text{и} \quad mg = f_1\sin\beta + N.$$

Отсюда получаем

$$f_1 = \frac{m(\mu g + a)}{\cos\beta + \mu\sin\beta}.$$

Минимальное значение силы достигается при таком угле $\beta$, что $\operatorname{tg}\beta = \mu$, и равно

$$f_{\min 1} = \frac{m(\mu g + a)}{\sqrt{1+\mu^2}} \approx 8{,}94 \text{ Н}.$$

Полученные результаты говорят сами за себя.

*А.Зильберман*

**Ф2296.** *Жесткий стержень постоянного круглого сечения S и длины $L \gg \sqrt{S}$ раскрутили относительно его средней точки вокруг оси, перпендикулярной оси симметрии стержня. При какой линейной скорости движения концов стержня при вращении он порвется? Предельное напряжение растяжения, которое выдерживает материал стержня, $\sigma_{\max} = 10^9$ Па, плотность этого материала $\rho = 8000$ кг/м$^3$.*

Разобьем (мысленно) цилиндрический стержень на множество плоских «блинов» толщиной $dx$, плоскости которых перпендикулярны оси стержня. Для каждого блина можно написать закон движения (второй закон Ньютона) в виде

$$\rho(S\,dx)\frac{\left(\dfrac{vx}{L/2}\right)^2}{x} = -S\,d\sigma.$$

Отсюда получаем, что напряжение растяжения вблизи концов цилиндра равно нулю, а в самом его центре (на оси вращения) максимально и равно $\frac{\rho v^2}{2}$. Приравнивая это максимальное напряжение его предельному значению, находим максимальную линейную скорость частиц на концах цилиндра:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2\sigma_{\max}}{\rho}} = 500 \text{ м/с}.$$

*Д.Сопроматов*

**Ф2297.** *Юный физик Глеб решил исследовать процесс таяния льда. К дну цилиндрического стакана он приморозил цилиндрическую сосульку и налил в стакан ледяной воды (при температуре 0 °С) так, что сосулька оказалась полностью под водой (рис.1). Площадь поверхности воды в стакане $S = 10$ см$^2$. Глеб поставил стакан на стол в комнате и стал измерять зависимость высоты $H$ уровня воды в стакане от времени $t$. Результаты измерений он аккуратно заносил в таблицу. Но вскоре экспериментатора позвали обедать, а когда он вернулся, сосулька совсем растаяла. Глеб точно знал, что в начале эксперимента содержимое стакана находилось в тепловом равновесии и имело температуру 0 °С, а температура в комнате не изменялась. Плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м$^3$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг, плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м$^3$. Сосулька за время наблюдения не всплывала. Пользуясь полученной таблицей:*

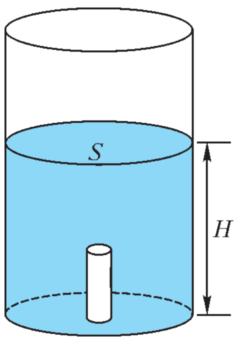



Рис. 1

| t, мин | 0 | 2 | 15 | 30 | 39 | 45 | 55 | 80 | 105 | … | 150 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| H, мм | 153 | 153 | 152 | 151 | 151 | 150 | 150 | 148 | 147 | … | 145 |
| сосулька | есть | есть | есть | есть | есть | есть | есть | есть | есть | … | нет |

*1) помогите Глебу установить, через какое время после начала эксперимента произошло полное таяние льда;*
*2) найдите мощность притока тепла из комнаты к содержимому стакана (т.е. определите, какая энергия поступает за одну секунду к содержимому стакана через его стенки).*

Так как стакан все время имеет температуру 0 °С и комнатная температура также не меняется, то постоянной будет и мощность подводимого тепла. Докажем, что график зависимости $H(t)$ должен быть линейным. Пусть за малое время $\Delta t$ системе передано количество теплоты $N\Delta t$, где $N$ – искомая мощность подводимого тепла. Оно целиком расходуется только на плавление льда, следовательно, за это время растает лед массой

$$\Delta m = \frac{N\Delta t}{\lambda}.$$

Изменение объема содержимого стакана можно найти как разность объемов растаявшего льда и воды, полученной из этого льда:

$$\Delta V = \frac{\Delta m}{\rho_л} - \frac{\Delta m}{\rho_в}.$$

При этом понижение уровня воды в стакане будет равно

$$\Delta H = \frac{\Delta V}{S} = \frac{N\Delta t}{\lambda S}\left(\frac{1}{\rho_л} - \frac{1}{\rho_в}\right).$$

Видно, что высота $H$ линейно уменьшается с течением времени $t$.
1) Для ответа на первый вопрос задачи следует, пользуясь таблицей, нанести точки на график зависимости высоты от времени (рис.2), провести через них прямую линию и экстраполировать полученную зависимость до пересечения с уровнем 145 мм – это уровень

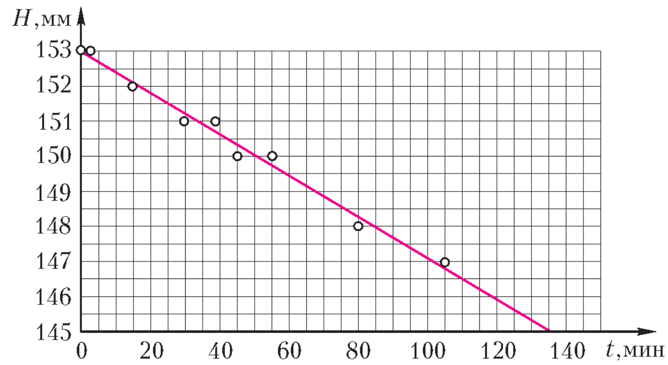



Рис. 2

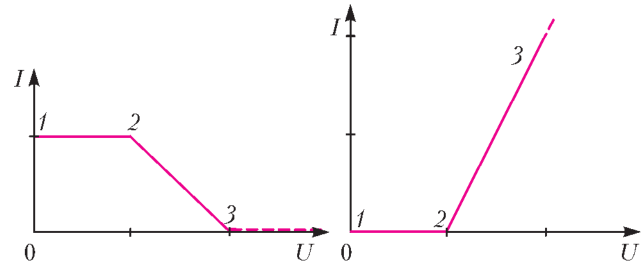
воды в стакане после полного таяния льда. Отсюда получим ответ: $\Delta t_т = 135$ мин (с точностью до 5 мин).
2) Для нахождения мощности притока тепла воспользуемся выведенным соотношением для $\Delta H$, из которого получим

$$N = \frac{\Delta H_т \lambda S \rho_л \rho_в}{\Delta t_т (\rho_в - \rho_л)} \approx 2{,}93 \text{ Вт}.$$

Здесь при подстановке взято $\Delta H_т = 0{,}008$ м (полное уменьшение уровня воды в стакане за время таяния льда), $\Delta t_т = 135$ мин.
*Замечание.* Вообще говоря, при таком разбросе точек на графике следует пытаться провести через них две прямые линии для того, чтобы можно было оценить погрешность найденного времени таяния льда – оно может лежать в интервале 130–140 мин.

*М.Замятнин*

**Ф2298.** *Даны вольт-амперные характеристики – ВАХ – двух нелинейных элементов при $U > 0$ (см. рисунок). У первого элемента на ВАХ лежат точки 1 ($I = 1$А, $U = 0$), 2 ($I = 1$А, $U = 1$В), 3 ($I = 0$, $U = 2$В). У второго элемента на ВАХ лежат точки 1 ($I = 0$,*



*$U = 0$), 2 ($I = 0$, $U = 1$В), 3 ($I = 2$А, $U = 2$В), а далее график идет вдоль по прямой, содержащей отрезок 2–3. Какими будут вольт-амперные характеристики при последовательном и при параллельном соединении этих элементов?*

При параллельном соединении токи элементов при одном и том же напряжении складываются, поэтому ВАХ при $U > 0$ состоит из трех прямолинейных участков – двух отрезков и прямой линии. Их начала и концы – *1-2*, *2-3*, *3-4* и далее по прямой – расположены в точках *1* ($I = 1$ А, $U = 0$), *2* ($I = 1$ А, $U = 1$ В), *3* ($I = 2$ А, $U = 2$ В), *4* ($I = 4$ А, $U = 3$ В).

При последовательном соединении элементов напряжение на двух элементах не может быть меньше 1,5 В, т.е. на ВАХ отсутствуют значения токов при $U < 1{,}5$ В. Поэтому первая (ближайшая к началу координат) точка ВАХ *1* имеет координаты $I = 1$ А, $U = 1{,}5$ В. Вторая характерная точка *2* имеет координаты $I = 1$ А, $U = 2{,}5$ В. Между точками *1* и *2* – прямой отрезок ВАХ. Третья характерная точка *3* имеет координаты $I = 0$, $U = 3$ В. Между точками *2* и *3* – прямой отрезок ВАХ. При напряжениях $U > 3$ В ток через последовательно включенные элементы не течет.

*В.Ахов*

**Ф2299.** *Мальвина рассматривает свое изображение в зеркале, плоскость которого вертикальна и находится на расстоянии L от носа Мальвины. Зеркало имеет две отражающие поверхности и укреплено на вертикальной оси, вокруг которой может вращаться. Ось вращения лежит в плоскости зеркала и также находится на расстоянии L от носа Мальвины. Буратино закрутил зеркало так, что оно приобрело начальную угловую скорость $\omega_0$. Вследствие наличия трения угловая скорость вращения зеркала равномерно уменьшилась до нуля за время $\tau$.*

*1) По какой траектории движется изображение носа Мальвины в зеркале?*
*2) С какой угловой скоростью движется изображение носа Мальвины в зеркале через время $\tau/2$ после начала вращения зеркала?*
*3) Чему равен модуль ускорения, с которым движется изображение носа Мальвины в момент времени $\tau/2$ после начала вращения зеркала?*

1) Пусть зеркало повернулось вокруг оси на некоторый угол $\alpha$. Если построить изображение носа Мальвины в плоском зеркале в начальный момент времени и в произвольный момент времени, то из чертежа станет понятно, что изображение носа Мальвины движется по окружности радиусом $L$.
2) Если мгновенная угловая скорость зеркала равна $\omega$, то мгновенная угловая скорость изображения носа в зеркале равна $2\omega$. Коэффициент «2» здесь возникает потому, что за пол-оборота зеркала изображение совершает полный оборот. За время $\tau/2$ угловая скорость зеркала уменьшилась до величины $\omega_0/2$. Поэтому угловая скорость изображения носа в этот момент равна $\omega_0$.
3) Линейная скорость изображения носа равна $v = 2\omega L$. Составляющая ускорения, направленная по линии мгновенной скорости навстречу этой скорости, равна $2\omega L/\tau$, поскольку линейная скорость равномерно уменьшается до нуля за время $\tau$. Перпендикулярная к мгновенной скорости составляющая мгновенного ускорения равна $v^2/L$. Таким образом, в интересующий нас момент времени, когда $\omega = \omega_0/2$, эта составляющая равна $\omega_0^2 L$. Следовательно, искомый модуль ускорения носа Мальвины равен

$$a = \sqrt{\left(2\omega_0 L/\tau\right)^2 + \left(\omega_0^2 L\right)^2} = \omega_0 L\sqrt{\left(4/\tau^2\right) + \omega_0^2}\,.$$

*К.Барабас*

## Равные площади и повороты

В этой небольшой заметке мы рассмотрим несколько задач, связанных с одной геометрической конструкцией. В частности, мы обобщим задачи М827 (решение – в «Кванте» №1 за 1984 г.) и М2288 (решение – в этом номере журнала).

Начнем с такой задачи.

**Задача 1.** На сторонах $BC$, $CA$, $AB$ равностороннего треугольника $ABC$ выбрали точки $A'$, $B'$, $C'$ соответственно. Точки пересечения отрезков $AA'$, $BB'$, $CC'$ обозначим $P$, $Q$, $R$ (рис. 1, *а*, *б*)[1]. Положим $x = AB'$, $y = BC'$, $z = CA'$. Докажите, что $x = y = z$ тогда и только тогда, когда площади треугольников $APB'$, $BQC'$ и $CRA'$ равны.

**Решение.** В одну сторону утверждение доказать несложно. Действительно, если $AB' = BC' = CA'$, то точки $A'$, $B'$, $C'$ переходят друг в друга (по циклу) при повороте на $120°$ вокруг центра треугольника $ABC$, значит, треугольники $APB'$, $BQC'$ и $CRA'$ равны (они совмещаются поворотом).

Обратное утверждение доказать сложнее.[2] Однако и здесь попробуем применить поворот на $120°$. Итак, рассмотрим поворот, переводящий $A$ в $B$, $B$ в $C$, $C$ в $A$ (для рисунка 1 это поворот против часовой стрелки). При этом повороте точки $A'$, $B'$ и $C'$ перейдут в точки $A''$, $B''$ и $C''$, лежащие на сторонах $CA$, $AB$, $BC$ соответственно и такие, что $AA'' = z$, $BB'' = x$, $CC'' = y$.

В нашей конструкции отрезки $AB'$, $BC'$, $CA'$ равноправны, и можно далее считать, что $AB' = x$ – наименьший из них по длине. Имеется два случая упорядочения длин: $x \le y \le z$ и $x \le z \le y$.

1. Пусть $x \le y \le z$ (рис.1,*в*), тогда $B''$ лежит на отрезке $BC'$, а $C''$ – на отрезке $CA'$. Треугольник $BB''C$ лежит целиком в треугольнике $BC'C$, а треугольник $CC''A$ –

[1] Показаны две возможные конфигурации. В первом случае треугольники $APB'$, $BQC'$ и $CRA'$ не пересекаются, а во втором – пересекаются по треугольнику $PQR$. Во втором случае ясно, что равенство площадей треугольников $APB'$, $BQC'$ и $CRA'$ эквивалентно равенству площадей четырехугольников $AB'QR$, $BC'RP$ и $CA'PQ$.

[2] Аналитический способ приводит к следующей задаче (полагаем, что сторона треугольника $ABC$ равна 1): доказать, что для чисел $x, y, z \in (0;1)$ равенство $\dfrac{xy^2}{1-x+xy} = \dfrac{yz^2}{1-y+yz} = \dfrac{zx^2}{1-z+zx}$ верно только при $x = y = z$. Алгебраически решить эту задачу довольно трудно. Наоборот, за счет геометрической интерпретации у этой алгебраической задачи возникает изящное решение.

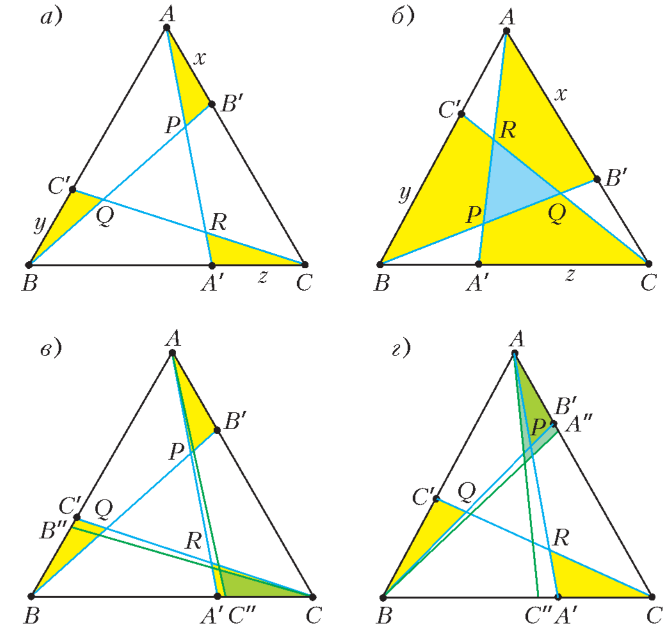



Рис. 1

целиком в треугольнике $CA'A$. Поэтому при нашем повороте $\Delta BQC' = \Delta BC'C \cap \Delta AB'B$ перейдет в треугольник $T = \Delta CC''A \cap \Delta BB''C$ (зеленый на рисунке 1,*в*), которой целиком лежит внутри треугольника $\Delta CRA' = \Delta BC'C \cap \Delta CA'A$. По условию площадь треугольника $T$ равна площади треугольника $CRA'$, поэтому эти треугольники должны совпадать. Отсюда следует, что $B'' = C'$, $C'' = A'$, и значит, $x = y = z$.

2. Пусть $x \le z \le y$ (рис.1,*г*), тогда $B'$ лежит на отрезке $AA''$, а $A'$ – на отрезке $CC''$. При нашем повороте треугольник $CRA'$ перейдет в треугольник $T'$ (зеленый на рисунке 1,*г*), которой целиком покрывает треугольник $APB'$. Из равенства площадей треугольников $T'$ и $APB'$ следует совпадение этих треугольников, откуда $x = y = z$.

Задачу 1 можно обобщить для произвольного треугольника следующим образом.

**Задача 2.** В (произвольном) треугольнике $ABC$ положим $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Остальные обозначения такие же, как в задаче 1. Докажите, что $\frac{x}{b} = \frac{y}{c} = \frac{z}{a}$ тогда и только тогда, когда площади треугольников $APB'$, $BQC'$ и $CRA'$ равны.

**Решение.** Можно сделать *аффинное преобразование*, переводящее данный треугольник $ABC$ в правильный треугольник.[3] Такое преобразование сохранит отношение площадей и отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой. Поэтому задача 2 следует из задачи 1.

Отметим, что из утверждения задачи 2 легко следует

**Решение задачи М2288.** В условии этой задачи дано равенство площадей треугольников $APB'$, $BQC'$ и $CRA'$ в том случае, когда $AA'$, $BB'$ и $CC'$ пересекаются в одной точке (т.е. в случае $P = Q = R$). Из задачи 2 получаем равенство $\frac{x}{b} = \frac{y}{c} = \frac{z}{a}$. Пусть каждое из этих отношений равно $\lambda$. Остается понять, что $\lambda$ может быть равно лишь $1/2$ (при $\lambda = 1/2$ отрезки $AA'$, $BB'$ и $CC'$ являются медианами).

Предположим, что $\lambda < 1/2$. Тогда точки $A'$, $B'$, $C'$ лежат внутри отрезков $CA_0$, $AB_0$, $BC_0$, где $A_0$, $B_0$, $C_0$ – середины сторон треугольника (рис.2). Но тогда, очевидно, $AA'$, $BB'$ и $CC'$ не пересекаются в одной точке. Аналогично приводится к противоречию и предположение о том, что $\lambda > 1/2$.[4]

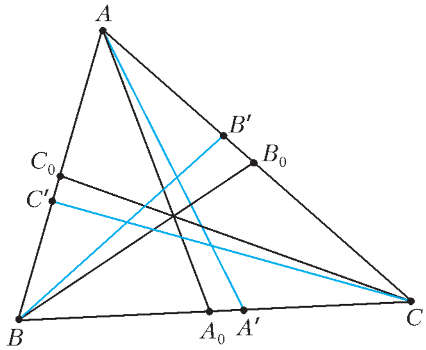



Рис. 2

Предлагаем читателям еще несколько задач, в решении которых могут помочь задачи 1 и 2, а также идеи, которые встретились нам выше.

**Задачи**

**3.** Докажите, что площади красных четырехугольников на рисунке 3 равны тогда и только тогда, когда площади желтых треугольников равны (в задаче М827,а требовалось доказать, что из равенства площадей желтых треугольников следует равенство площадей красных четырехугольников).

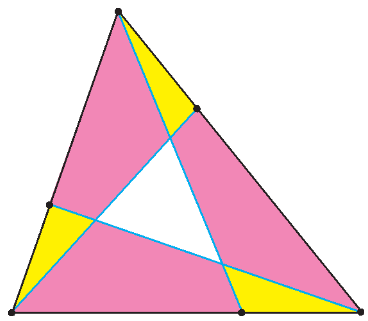


Рис. 3

*Указание:* оба утверждения, равносильность которых нужно доказать, эквивалентны, согласно задаче 2, одному и тому же условию на отношения, в которых точки разделяют стороны треугольника.

**4.** а) На сторонах квадрата выбрали точки так, как показано на рисунке 4,*а*. Докажите, что площади желтых треугольников равны тогда и только тогда, когда $x = y = z = t$.

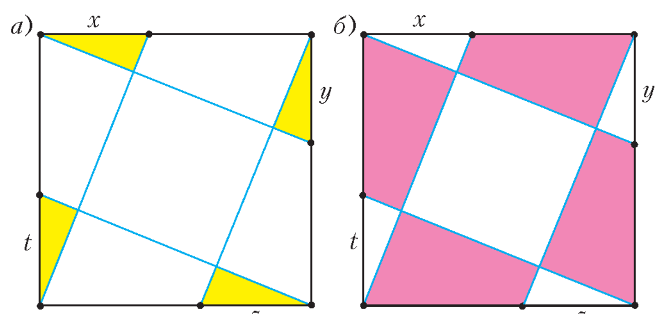



Рис. 4

б) Докажите, что площади красных четырехугольников (рис. 4,*б*) равны тогда и только тогда, когда $x = y = z = t$.

в*) Сформулируйте и решите аналог задачи 1 для правильного $n$-угольника.

*Указания.* а), б) Вначале можно доказать, что $x = z$ и $y = t$, рассмотрев центральную симметрию (заметим, что попытка использовать поворот на 90° и напрямую перенес-

[3] См. например, статью А. Заславского в «Кванте» №1 за 2009 г.

[4] Доказать, что $\lambda = 1/2$, можно и иначе, применив теорему Чевы.

ти рассуждения из решения задачи 1 не пройдет: возможно, каждый из отрезков $x$, $z$ больше каждого из отрезков $y$, $t$).

в) При нечетном $n$ проходит идея решения задачи 1 (поворот на $360°/n$ вокруг центра), нужно лишь найти подходящую тройку последовательных сторон многоугольника. При четном $n$ ($n = 2m$), как и в пункте а), сначала можно использовать поворот на $360°/m$ градусов.

**5.** Выясните, верны ли аналоги предыдущих задач, если точки $A'$, $B'$, $C'$ и т.д. выбираются не на сторонах, а на их продолжениях (например, как на рисунке 5).

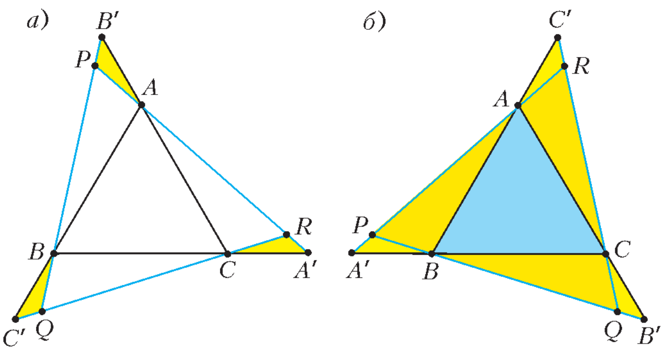



Рис. 5

**6.** а) Дан равносторонний треугольник со стороной 1 (рис.6,*а*). Докажите, что $S_1 + S_2 + S_3 = S$ тогда и только тогда, когда $x + y + z = 1$.

б) (задача М1332, «Квант» №9 за 1992 г.) Дан квадрат со стороной 1 (рис.6,*б*). Докажите, что $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S$ тогда и только тогда, когда $x + y + z + t = 2$.

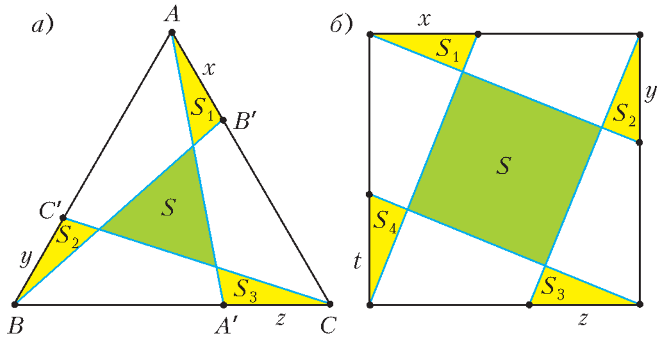



Рис. 6

*Указание к пункту а).* Условие $S_1 + S_2 + S_3 = S$ означает, что сумма площадей треугольников $ABB'$, $BCC'$, $CAA'$ равна площади треугольника $ABC$.

*В. Расторгуев*

## ПРОГУЛКИ С ФИЗИКОЙ

# Как растянуть мгновение

*(Начало см. на 4-й странице обложки)*

…Чтобы запечатлеть мгновение, мы используем фотокамеру. Действительно, когда выдержка составляет менее 1/100 с, объекты для камеры становятся практически неподвижными, а их границы на кадре получаются резкими. Это хорошо видно на фотографии, сделанной с выдержкой 1/400 с (рис.1). А теперь увеличим выдержку в сотни раз и увидим, что неподвижные объекты – дорога и деревья – остались резкими, а движущаяся машина из кадра исчезла, оставив только белую и красную полосы габаритных огней

Рис.1

Рис.2

(рис.2). Эта фотография была сделана поздно вечером без вспышки с выдержкой 1/2 с.

Зная выдержку, по длине полосы габаритных огней на ночном фото можно легко вычислить среднюю скорость автомобиля. Ширина «зебры» перед моим домом составляет 4 м. На фотографии видно, что длина полосы габаритных огней приблизительно в 2 раза больше ширины «зебры». Из этого следует, что скорость ночного автомобиля была 8 м/(0,5 с) = 16 м/с = 57,6 км/ч.

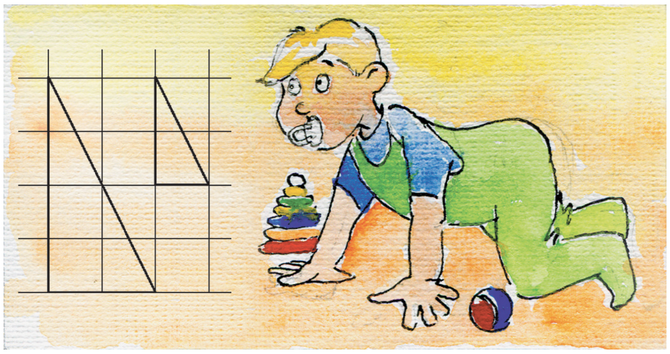
Используя тот же самый метод, можно с помощью фотокамеры определить скорость ветра при снегопаде. Для этого

*(Продолжение см. на с. 37)*

# Задачи

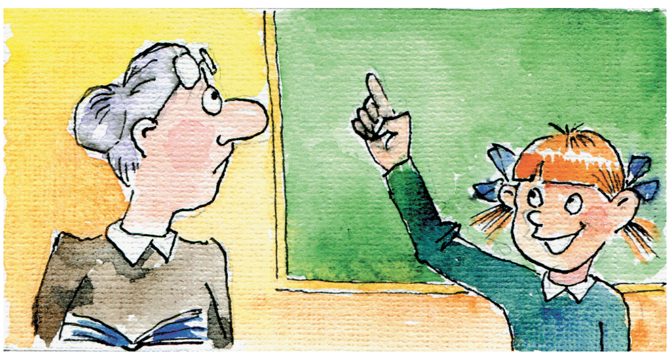
**1.** У Кости есть четыре больших треугольника и четыре маленьких — таких, как показано на рисунке. Помогите Косте сложить квадрат без дыр и наложений, использовав все эти треугольники.

*К.Кноп*



**2.** Решите ребус: $\text{АБ}^2 - \text{СС} = 2014$. (Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными — разные.)

*Т.Волосникова*



**3.** Три бородатых мудреца спорили, у кого самая длинная борода.
*Первый сказал*: «У меня самая длинная борода среди вас!»
*Второй*: «Нет, у меня длиннее, чем у тебя!»
*Третий*: «Хотя бы один из вас ошибается».
У кого из мудрецов самая короткая борода, если длины всех бород разные и правду сказал только мудрец с самой длинной бородой?

*И.Сидоров*

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Задачи 1, 3 и 4 предлагались на Олимпиаде пятиклассников Творческой лаборатории «2 × 2» в 2013 году.

**4.** Тетя Груша продает кабачки. Три кабачка она продает за 5 долларов, четыре кабачка — за 6 долларов, а пять кабачков — за 7 долларов. Ни в каком другом количестве тетя Груша кабачки не продает. Вчера она продала 100 кабачков и выручила за них 160 долларов. Сколько продаж совершила вчера тетя Груша?

*Е.Бакаев*

**5.** Можно ли нарисовать на листе бумаги четыре одинаковых квадрата и две перпендикулярные прямые так, чтобы квадраты не перекрывались (даже не касались) и каждая прямая пересекала каждый квадрат по отрезку?

*Фольклор*

*Иллюстрации Д.Гришуковой*

# Удивительная конструкция, или Рассказ о гофре

**С.ДВОРЯНИНОВ**

Толя Втулкин утверждает, что из обычного тетрадного листа бумаги размером примерно $16 \times 20$ см, используя только ножницы, он может создать конструкцию, удовлетворяющую таким условиям:

- конструкцию можно разместить на столе;
- ее высота составляет примерно полтора сантиметра;
- на нее сверху можно поместить груз массой более 3 кг (например, поставить трехлитровую банку с водой), и конструкция при этом не разрушится.

Можно ли этому верить? Давайте проверим.

Вырежем из листа бумаги несколько полосок длиной 20 см и шириной чуть более 1,5 см. Каждую полоску намотаем на карандаш и потом, сняв с карандаша, отпустим. Если полоска раскрутится слишком сильно, то намотаем ее еще раз. В результате полоска примет форму спирали. Разместим все такие полоски на столе в круге радиусом 10–12 см (на рисунке 1 таких полосок шесть, для сравнения рядом помещена двухрублевая монета). На эти полоски сверху положим кухонную подставку под горячее так, чтобы она опиралась на все наши опоры (рис.2). А затем на эту подставку осторожно, точнее говоря – равномерно распределяя нагрузку, поставим и груз – например, чугунный утюг массой 4,5 кг. Заметьте – ни одна бумажная полоска не смялась! Утюг оказался на требуемой высоте над столом.

*Рис. 1*

*Рис. 2*

Теперь, когда идея решения этой технической задачи вам ясна, вы можете поэкспериментировать. Если кончики намотанных на карандаш полосок аккуратно приклеить к соответствующим виткам спиралей, то у нас получатся прочные бумажные цилиндры высотой 1,5 см. Из тетрадного листа можно сделать 10 таких цилиндров. Расположите эти опоры в круге вплотную одна к другой и начинайте стопкой выкладывать на них сверху книги. Можете даже устроить соревнование – у кого высота стопки и количество книг окажутся больше.

А можно в качестве опор использовать те же полоски, сжатые гармошкой (рис.3). Правда, на таких опорах нам не удалось разместить слишком большой груз. Можно еще попробовать каждую такую полоску склеить в кольцо.

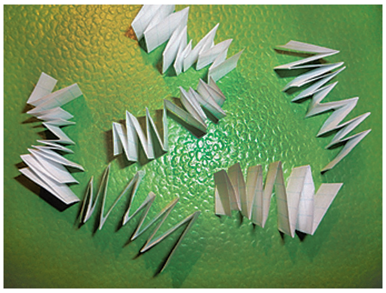


*Рис. 3*

Наверное, многие наши читатели, а особенно девочки, сразу вспомнили *плиссе* и *гофре* – так называют мелкие заутюженные параллельные складки на материи. Именно такая гофрированная, т.е. сжатая, бумага используется в промышленности для производства гофрокартона – материала для упаковочной тары.

Посмотрите на картонные коробки в магазине – все они сделаны из гофрокартона. Этот материал очень дешевый, но при этом отличается высокими физическими параметрами: он легкий и достаточно прочный. В простейшем случае такой картон состоит из трех слоев: внутренний слой – это гофробумага, два наружных – плоские слои картона. И то и другое изготавливают из макулатуры или другого вторичного сырья, что замечательно с позиций экономии ресурсов и защиты окружающей среды. Интересно, что по отдельности и бумага и картон – довольно мягкие материалы, а вот получаемая в сочетании композиция оказывается жесткой. Для еще большего упрочения гофрокартон изготавливают многослойным – пяти- и даже семислойным. В нем слои картона и гофрированной бумаги чередуются один за другим.

В интернете можно прочитать, что гофрированная бумага была запатентована в Великобритании в 1856 году и использовалась как подкладка под шляпы. В 1871 году в Америке был запатентован гофракартон, вскоре началось его массовое производство, постепенно распространившееся на весь мир.

Принцип гофра используется намного шире, чем это может показаться. Недавно во время ремонта нам пришлось заменить дверь, которую все многие годы называли деревянной. Оказалось, что эта дверь пустотелая и изготовлена из двух слоев толстого картона, к которым изнутри приклеен тонкий гофрированный картон. По сути дела, дверь эта бумажно-картонная. Папье-маше да и только!

*Термометр, без сомнения, есть одно из чудесных изобретений современной физики, которое в свою очередь много содействовало ее успехам.*

Рене Антуан Реомюр

*Конкретным видом термометра, в наименьшей степени подверженного неопределенным отклонениям любого типа, является термометр, который основан на расширении воздуха...*

Уильям Томсон (лорд Кельвин)

*При повышении температуры в оксидах и сульфидах число проводящих или свободных квантов электричества – электронов – увеличивается, пока не станет предельным, после чего их поведение уподобляется металлам...*

Иоганн Кенигсбергер

*Однажды мы предположили, что кинетическая энергия молекул пропорциональна температуре. Это предположение привело к температурной шкале, которую мы назвали шкалой идеального газа.*

Ричард Фейнман

# А так ли хорошо знакома вам термометрия?

Само слово «термометрия» предполагает, что речь сегодня пойдет об измерениях. Только измерениях чего? Создать прибор под названием «температурометр», непосредственно указывающий на измеряемую величину, нельзя. А вот следить за различными свойствами окружающих нас тел, *зависящими от температуры*, вполне возможно. Собственно, эту задачу на протяжении многих десятилетий и старались решить такие корифеи науки, как Галилей, Герике, Ньютон, Ломоносов, Томсон. Но немало и менее известных ученых оставили свои имена на температурных шкалах.

Этими зависимыми от температуры величинами являются объем и давление газа, длина твердых стержней и объем жидкостей, электрическое сопротивление полупроводников и проводников, цвет особого рода кристаллов, яркость раскаленных металлов и светимость звезд... Скольжение лыж по снегу, вязкость сиропа, плавление воска... – мы собьемся со счета, приводя примеры явлений и процессов, так или иначе позволяющих судить о влиянии на них перемены температуры. Наши изобретательные предшественники так усовершенствовали процедуру измерения температуры, что теперь мы можем обнаружить даже «эхо» Большого взрыва миллиарднолетней давности, запечатленное в реликтовом излучении, соответствующем температуре около 3 К.

Попробуем-ка и мы с бóльшим уважением отнестись ко вроде бы простенькому прибору, именуемому в обиходе «градусником», и с его помощью взять несколько уроков по истории науки, по теоретической и прикладной физике.

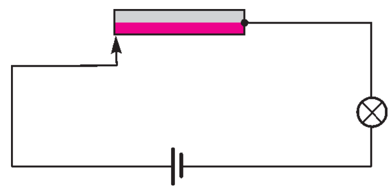
### Вопросы и задачи

**1.** Когда гитару выносят из теплого помещения на мороз, ее стальные струны становятся более натянутыми. Почему?

**2.** Каким требованиям должен удовлетворять материал электродов, впаиваемых в стеклянный баллон лампы накаливания?

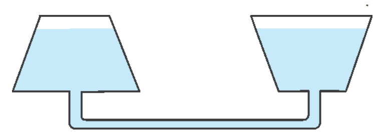
**3.** Нарушится ли равновесие чувствительных весов, если одно плечо коромысла нагреть?

**4.** При повышении температуры биметаллическая пластинка должна разомкнуть электрическую цепь, изображенную на рисунке. Укажите, какая часть пластинки медная, а какая часть – стальная.



**5.** Допустим, что найдена жидкость, коэффициент объемного расширения которой при любой температуре равен нулю. Как вела бы себя эта жидкость, если бы ее налили в металлическую кастрюлю и поставили на раскаленную плиту?

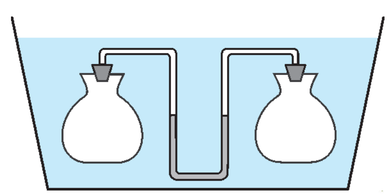
**6.** На рисунке изображены сообщающиеся сосуды. Куда потечет вода по соединительной трубке, если нагреть воду в правом сосуде? А если в левом?



**7.** Как отразилось бы на показаниях термометра равенство коэффициентов объемного расширения рабочей жидкости и стекла?

**8.** Можно ли применять ртутные термометры для измерения температур до $+600\ ^\circ C$, если ртуть кипит при $+357\ ^\circ C$?

**9.** Два одинаковых сосуда соединены с манометром, сделанным из узкой стеклянной трубки. Уровни ртути в коленах манометра одинаковы. Сосуды опускают в теплую воду, как показано на рисунке. Что произойдет с положением ртути в манометре? Как изменится ответ, если сосуды будут разных размеров? А если один из сосудов будет наполнен азотом, а другой – водородом?

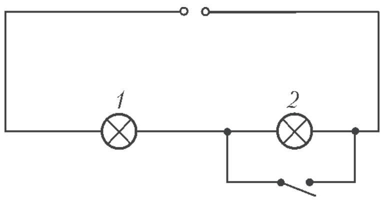


**10.** Чем отличается тепловое расширение газов от теплового расширения жидкостей?

**11.** Почему газовый термометр дает правильные показания только при совершенно сухом газе?

**12.** Вольфрам имеет положительный, а уголь – отрицательный термический коэффициент сопротивления. Для каждой из ламп, имеющих вольфрамовый и угольный волоски, сравните силы тока при включении и в установившемся режиме.

**13.** Цепь, представленная на рисунке, состоит из лампы *1* мощностью 40 Вт, ключа и лампочки *2* от карманного фонарика. Цепь включили в городскую сеть при замкнутом ключе, а затем ключ разомкнули. В этом случае лампы горели нормально. Когда же в другой раз эту цепь включили в сеть при разомкнутом ключе, лампочка *2* сразу перегорела. Почему?




**14.** В цепь включены электроплитка и амперметр. Изменятся ли показания амперметра, если подуть на раскаленную плитку холодным воздухом?

**15.** Почему с повышением температуры полупроводников их сопротивление уменьшается?

**16.** При нагревании сопротивление полупроводника уменьшилось на 20%. На сколько процентов при этом увеличился ток в нем?

**17.** Каковы преимущества полупроводниковых термоэлементов перед металлическими?

**18.** Почему холодные звезды имеют красноватый цвет, а горячие звезды кажутся белыми?

### Микроопыт

Опустите на секунду медицинский термометр в горячую ( 40 – 50 °С ) воду (не перегрейте его, иначе он лопнет!). Почему при этом показание термометра на мгновение уменьшится?

### Любопытно, что...

...слово «температура», появившееся в литературе в 1624 году, означало «смесь» – смесь вещества тела и особого вещества, теплорода, отвечающего за нагревание и охлаждение тел. В течение почти полутора веков считалось, что, измеряя температуру, мы измеряем концентрацию теплорода в теле.

...заслуга изобретения спиртового термометра, работающего при значительно более низких температурах, чем приборы, заполненные ртутью, принадлежит ученику Галилео Галилея герцогу Фердинанду II, правившему во Флоренции в середине XVII века.

...еще в 1702 году французский физик Гийон (Гильом) Амонтон, конструировавший гигрометры, барометры и термометры, пришел к идее о существовании самой низкой возможной температуры – такой, при которой давление газа становится равным нулю. Эти выводы получили развитие много позже – в 1848 году Уильям Томсон ввел понятия термодинамической температуры и абсолютного нуля и построил соответствующую им температурную шкалу.

...во времена Даниэля Фаренгейта, предложившего в 1709 году собственную, используемую до сих пор температурную шкалу, было распространено убеждение, будто температура воздуха никогда не поднимается выше температуры крови человека, и такое нагревание воздуха считалось уже смертельным.

...предшественницей стоградусной шкалы Цельсия была изобретенная в 1730 году удобная для широкого применения восьмидесятиградусная шкала спиртового термометра. Создателем ее был француз Рене Реомюр, считавший, однако, главным делом своей жизни... зоологию и более всего интересовавшийся общественными насекомыми.

...опыты, поставленные в 1760 году шотландским ученым, основоположником физических исследований в области калориметрии Джозефом Блэком для проверки линейности шкал термометров, привели его к мысли о различии двух характеристик тепловых явлений – теплоты и температуры, которые долгое время путали друг с другом.

...для измерения очень низких температур газовые термометры делают из стекла или кварца и наполняют водородом или гелием. Для очень же высоких температур – до 1500 °С – приборы изготовляют из тугоплавкого сплава платины с родием и наполняют их азотом.

...«старейший» полупроводник, увеличение проводимости которого с ростом температуры впервые было обнаружено Майклом Фарадеем в 1833 году, это сернистое серебро. Первые термисторы – проборы на основе полупроводников, сопротивление которых меняется в зависимости от температуры, – были изготовлены в 1890 году немецким физиком, Нобелевским лауреатом Вальтером Нернстом. Сегодня они применяются для измерения и регулирования температуры в диапазоне от 1 К до 1800 К.

...уменьшение сопротивления металлов при низких температурах, оказывается, может смениться его ростом. Происходит это, как недавно было найдено, в очень тонких проволочках некоторых сплавов диаметром порядка нескольких сот ангстрем.

...полупроводниковые болометры, или термосопротивления, изобретенные еще в 1880 году американским астрофизиком Сэмюэлем Ленгли, ныне способны регистрировать тепловые потоки мощностью в десятимиллионные доли ватта.

...необычная способность жидких кристаллов приобретать иной цвет при изменении температуры всего лишь на тысячные доли градуса послужила их применению в качестве чувствительнейших термоиндикаторов.

...современные термодатчики достигли таких крохотных размеров, что позволяют безболезненно для животных располагать себя на их теле, чтобы затем вести дистанционное наблюдение за их состоянием, особенно за способами терморегуляции.

### Что читать в «Кванте» о термометрии

*(публикации последних лет)*

1. Калейдоскоп «Кванта» – 2007, №1, с.32; 2008, №1, с.32; 2011, №5/6, с.32;
2. «Температура» – 2007, Приложение №5;
3. «Метеорологические наблюдения...» – 2010, №3, с.2;
4. «Физический калейдоскоп» – 2012, Приложение №3, с.31, 50, 107.

*Материал подготовил А.Леонович*

# Множества и характеристические функции

Л.АЛЬТШУЛЕР

В школьной математике мы встречаемся с *множествами* на каждом шагу: множество целых чисел, множество многочленов, множество параллелограммов, множество центров всех окружностей на плоскости, множество точек отрезка и т.п. Объекты (или предметы), составляющие множество, называются его *элементами*.

В современной математике слова «множество» и «элемент» используются часто, и теория множеств – это язык, на котором разговаривают математики.

Обычно множества обозначают прописными (большими) буквами, а элементы множества – строчными (малыми) буквами. Запись $x \in A$ обозначает, что $x$ является элементом множества $A$, а запись $x \notin A$ обозначает, что $x$ элементом множества $A$ не является. Множества $A$ и $B$ называются равными (пишут $A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов. Если каждый элемент множества $B$ принадлежит множеству $A$, то говорят, что $B$ есть подмножество $A$ (или $A$ содержит множество $B$). Обозначают это так: $B \subset A$ (или $A \supset B$). Говорят также, что имеет место включение множества $B$ в множество $A$. Ясно, что $A = B$ тогда и только тогда, когда $A \subset B$ и $B \subset A$.

В математике рассматривают и множество совсем без элементов. Оно называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$. Например, множество действительных решений уравнения $x^2+1=0$, множество четырехугольников, все стороны которых равны, а диагонали не перпендикулярны, не содержат элементов.

Мы будем рассматривать только множества, являющиеся подмножествами некоторого заданного (*универсального*) множества $U$. Подмножество $A \subset U$ обычно задается каким-либо характеристическим свойством $P$, так, что элементы подмножества этим свойством обладают, а все остальные элементы множества $U$ свойством $P$ не обладают. Например, множество точек плоскости, представляющее собой серединный перпендикуляр к отрезку, можно описать так: это *множество всех точек плоскости, равноудаленных от концов данного отрезка*. Множество, определяемое свойством $P$, обычно обозначается так: $\{x \in U | P(x)\}$. Конечные множества иногда задают просто списком их элементов, заключенным в фигурные скобки. Например, $\{a, 2, b, 123\}$ – множество, состоящее из букв $a$, $b$ и чисел 2 и 123.

### Основные операции над множествами

Оказывается, что на множестве всех подмножеств можно построить алгебру, напоминающую алгебру целых чисел или многочленов: подмножества можно складывать, вычитать и умножать. Дадим необходимые определения.

*Объединением* множеств $A$ и $B$ (его иногда называют *сложением*) называется множество, составленное из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств $A$ и $B$. Объединение множеств $A$ и $B$ обозначается $A \cup B$. Таким образом,

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Заметим, что в математике союз «или» всегда понимается в неисключающем смысле: «$x \in A$ или $x \in B$» означает, что $x$ принадлежит *хотя бы одному* из множеств $A$ и $B$, а быть может, и обоим (рис.1).

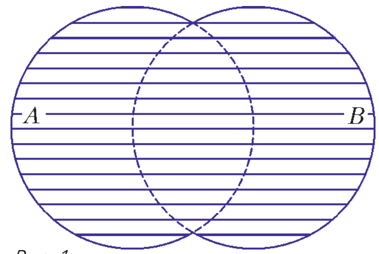


Рис. 1

*Пересечением* множеств $A$ и $B$ (его иногда называют *умножением*) называется множество, составленное из их общих элементов, т.е. элементов, принадлежащих и $A$, и $B$. Оно обозначается $A \cap B$ (рис. 2). Тем самым,

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

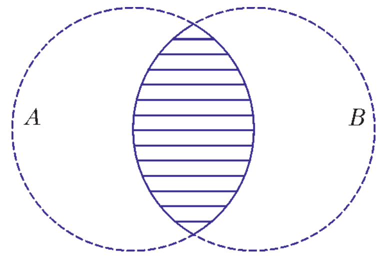


Рис. 2

*Разностью* $A \setminus B$ множеств $A$ и $B$ называется совокупность тех элементов множества $A$, которые не принадлежат множеству $B$. При этом, вообще говоря, не предполагается, что $A \supset B$ (рис.3).

*Дополнением* подмножества $A$ во множестве $U$ называется множество $\bar{A} = U \setminus A$, т.е. совокупность тех элементов множества $U$, которые не принадлежат множеству $A$.

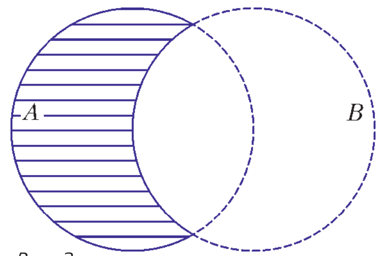


Рис. 3

### Алгебра множеств

Вся алгебра целых чисел (и алгебра многочленов тоже) строится на следующих законах.

1°. $a + b = b + a$ (коммутативность сложения).

2°. $(a+b)+c = a+(b+c)$ (ассоциативность сложения).

3°. $a + 0 = a$ (свойство нуля).

4°. $a+(-a)=0$ (свойство противоположного элемента).

5°. $ab = ba$ (коммутативность умножения).

6°. $(ab)c = a(bc)$ (ассоциативность умножения).

7°. $a(b+c) = ab+bc$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

8°. $a \cdot 1 = a$ (свойство единицы).

Почти все эти законы сохраняются и для действий над множествами. При этом надо заменить «+», «·», «–» соответственно на «$\cup$», «$\cap$», «$\setminus$». Противоположным элементом для множества $A \subset B$ в алгебре множеств надо считать дополнение к множеству $A$, т.е. множество $U \setminus A = \bar{A}$. Роль нуля играет пустое множество $\varnothing$, а роль единицы – универсальное множество $U$.

Сформулируем аналогичные свойства теории множеств.

I°. $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность объединения).

II°. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (ассоциативность объединения).

III°. $A \cup \varnothing = A$ (свойство пустого множества).

IV°. $A \cup \bar{A} = U$ (свойство дополнения).

V°. $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность пересечения).

VI°. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ассоциативность пересечения).

VII°. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность пересечения относительно объединения).

VIII°. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность объединения относительно пересечения).

IX°. $A \cap U = A$ (свойство универсального множества).

Здесь появляется новое свойство VIII°, и свойство IV° тоже отличается от соответствующего свойства 4° обычной алгебры.

Все эти свойства нетрудно доказать. Например, ясно, что $A \cup B = B \cup A$, так как $A \cup B$ и $B \cup A$ означают одно и то же множество, в которое входят все элементы из $A$ и из $B$ и не входят никакие другие элементы. Точно так же доказываются свойства II°, V° и VI°. Каждое из перечисленных свойств можно проиллюстрировать на рисунке. Например, свойство VII° дистрибутивности пересечения относительно объединения $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ можно изобразить так, как на рисунке 4. Такие картинки называются *диаграммами Венна* или *кругами Эйлера*.

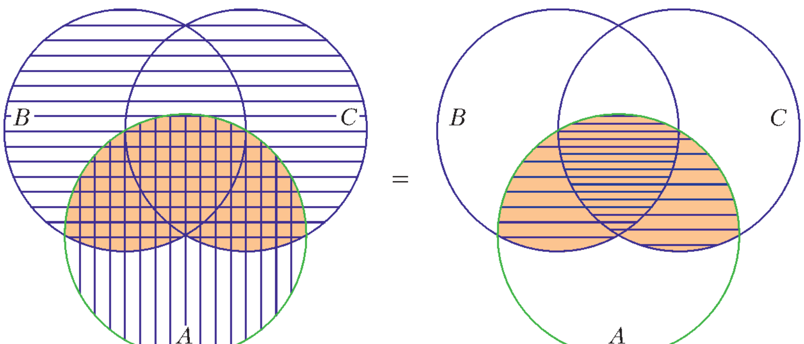


Рис. 4

Заметим, что картинки такого рода не являются доказательством, а только иллюстрируют соответствующее равенство. Логически строгое доказательство может выглядеть, например, так. Пусть $x \in A \cap (B \cup C)$. Это значит, что $x \in A$ и $x \in B \cup C$, т.е. $x \in B$ или $x \in C$. Имеем два случая:

1) $x \in A$ и $x \in B$ и тогда $x \in A \cap B$, и, следовательно, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

2) $x \in A$ и $x \in C$, т.е. $x \in A \cap C$, и снова $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Точно так же доказывается и обратное включение (вспомним, что множества $A$ и $B$ равны тогда и только тогда, когда $A \subset B$ и $B \subset A$).

Обратите внимание на важное отличие законов сложения и умножения обычной алгебры от аналогичных законов для множеств: равенство $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ в обычной алгебре неверно. Для множеств дистрибутивный закон объединения относительно пересечения (VIII°) справедлив. Круги Эйлера для равенства VIII° выглядят так, как на рисунке 5. Для чисел (или многочленов) верно следующее тождество:

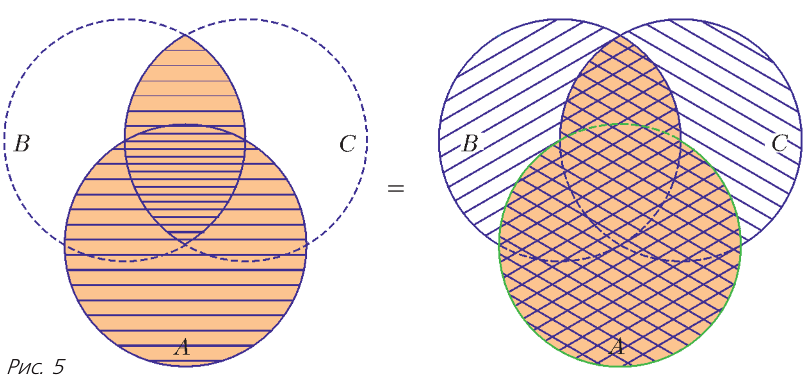


Рис. 5

$(b - c) - (b - a) = a - c$. Для множеств верно всего лишь включение: $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) \subset A \setminus C$ (нарисуйте соответствующие круги Эйлера).

**Упражнения**

**1**. Докажите равенство $(B \setminus C) \setminus (A \setminus C) = (B \setminus A) \setminus C$.

**2**. Докажите включение $A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$.

**3**. Докажите эквивалентность $B \subset A \Leftrightarrow A \cap B = B \Leftrightarrow \Leftrightarrow A \cup B = A$.

**4**. Докажите законы де Моргана

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \text{ и } \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

В общем случае: $\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$ и $\overline{A_1 \cap \ldots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \ldots \cup \overline{A_n}$.

*Симметрической разностью* множеств $A$ и $B$ называется множество $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Круги Эйлера для симметрической разности показаны на рисунке 6. Из этого рисунка можно увидеть равенство $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

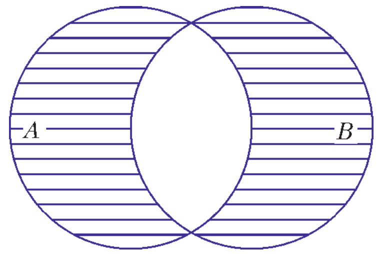


Рис. 6

Теоретико-множественные тождества и включения обычно доказываются несложно, хотя доказательства некоторых из них технически довольно трудны. Попробуйте, например, строго доказать закон ассоциативности для симметрической разности: $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ (круги Эйлера изображены на рисунке 7).

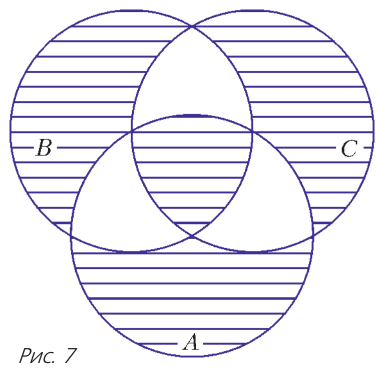


Рис. 7

Оказывается, что многие теоретико-множественные тождества и включения можно доказывать как обычные числовые равенства: раскрытием скобок, приведением подобных членов и т.п. Мы сейчас покажем, как это можно сделать.

## Характеристические функции

*Характеристической функцией* подмножества $A \subset U$ называется функция $\varphi_A$, определенная на множестве $U$, которая равна 1 на элементах подмножества $A$ и равна 0 на остальных элементах множества $U$. Ясно, что при всех $x \in U$ выполнено $\varphi_\varnothing(x) = 0$, $\varphi_U(x) = 1$.

Характеристическая функция множества полностью определяет это множество: множества $A$ и $B$ равны тогда и только тогда, когда их характеристические функции совпадают, т.е. при всех $x \in U$ выполняется $\varphi_A(x) = \varphi_B(x)$.

**Пример.** Пусть универсальное множество $U$ представляет собой первые десять натуральных чисел: {1, 2, …, 10}, $A$ = {2, 3, 7}, $B$ = {2, 3, 4, 8}.

Характеристическую функцию будем представлять упорядоченным набором ее значений на множестве $U$, т.е. набором из 10 цифр: нулей и единиц. Например, $\varphi_A = (0,1,1,0,0,0,1,0,0,0)$, $\varphi_B = (0,1,1,1,0,0,0,1,0,0)$. Выясним, какие характеристические функции соответствуют множествам $\bar{A}$, $A\cap B$, $A\cup B$. Нетрудно проверить, что $\varphi_{\bar{A}} = (1,0,0,1,1,1,0,1,1,1)$, $\varphi_{A\cup B} = (0,1,1,1,0,0,1,1,0,0)$, $\varphi_{A\cap B} = (0,1,1,0,0,0,0,0,0,0)$. Мы получили любопытные соотношения: $\varphi_{\bar{A}} = 1-\varphi_A$, $\varphi_{A\cap B} = \varphi_A\cdot\varphi_B$, $\varphi_{A\cup B} = \varphi_A+\varphi_B-\varphi_A\cdot\varphi_B$. Сложение, умножение и разность функций понимаются «поточечно». Например, значение суммы функций на каком-нибудь элементе есть просто сумма соответствующих значений функций слагаемых на этом элементе.

Формулы, которые мы получили, имеют общий характер. Для произвольных подмножеств $A\subset U$ и $B\subset U$ имеют место соотношения:

1) $\varphi_A^2 = \varphi_A$;

2) $\varphi_{\bar{A}} = 1-\varphi_A$;

3) $\varphi_{A\cap B} = \varphi_A\cdot\varphi_B$;

4) $\varphi_{A_1\cap\ldots\cap A_n} = \varphi_{A_1}\cdot\ldots\cdot\varphi_{A_n}$;

5) $\varphi_{A\cup B} = \varphi_A+\varphi_B-\varphi_A\cdot\varphi_B$;

6) $B\subset A \Leftrightarrow \varphi_A\cdot\varphi_B = \varphi_B$ (см. упражнение 3);

7) $\varphi_{A\setminus B} = \varphi_A-\varphi_B$, если $B\subset A$;

8) $\varphi_{A\setminus B} = \varphi_A-\varphi_A\cdot\varphi_B$.

Соотношения 1) и 2) очевидны; 3) и 5) можно доказать, разбирая четыре случая: $x\in A\setminus B$, $x\in B\setminus A$, $x\in A\cap B$, $x\notin A\cup B$; 4) доказывается индукцией. Соотношения 6) и 7) проверяются непосредственно; 8) следует из 6) и 7).

Для свойства 5) полезно дать доказательство, применяя правила де Моргана (см. упражнение 4) и соотношение 2). В самом деле,

$$\varphi_{A\cup B} = 1-\varphi_{\overline{A\cup B}} = 1-\varphi_{\bar{A}\cap\bar{B}} = 1-\varphi_{\bar{A}}\cdot\varphi_{\bar{B}} =$$
$$= 1-(1-\varphi_A)(1-\varphi_B) = \varphi_A+\varphi_B-\varphi_A\cdot\varphi_B.$$

Из доказательства соотношения 5) можно получить следствие

9) $\varphi_{\overline{A\cup B}} = (1-\varphi_A)(1-\varphi_B)$. В общем случае $\varphi_{\overline{A_1\cup A_2\ldots\cup A_n}} = \left(1-\varphi_{A_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\varphi_{A_n}\right)$ (доказывается методом математической индукции).

Покажем, как можно применить полученные формулы для доказательства некоторых теоретико-множественных соотношений. Докажем, например, свойство дистрибутивности объединения относительно пересечения: $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$.

Заметим, что

$$\varphi_{A\cup(B\cap C)} = \varphi_A+\varphi_{B\cap C}-\varphi_A\cdot\varphi_{B\cap C} = \varphi_A+\varphi_B\cdot\varphi_C-\varphi_A\cdot\varphi_B\cdot\varphi_C.$$

С другой стороны,

$$\varphi_{(A\cup B)\cap(A\cup C)} = \varphi_{A\cup B}\cdot\varphi_{A\cup C} =$$
$$= (\varphi_A+\varphi_B-\varphi_A\cdot\varphi_B)(\varphi_A+\varphi_C-\varphi_A\cdot\varphi_C).$$

Раскрывая скобки в последнем равенстве и пользуясь тем, что $\varphi_A^2 = \varphi_A$, получаем требуемое.

Обратимся вновь к симметрической разности $A\Delta B$. Мы уже говорили, но не доказывали, что симметрическая разность обладает свойством ассоциативности. Теперь мы его докажем.

Сначала получим выражение для характеристической функции $\varphi_{A\Delta B}$. Несложные вычисления (проделайте их самостоятельно) показывают, что

$$\varphi_{A\Delta B} = \varphi_A+\varphi_B-2\varphi_A\cdot\varphi_B. \qquad (1)$$

Отсюда получаем

$$\varphi_{(A\Delta B)\Delta C} = \varphi_A+\varphi_B+\varphi_C-$$
$$-\ 2\varphi_A\cdot\varphi_B-2\varphi_A\cdot\varphi_C-2\varphi_B\cdot\varphi_C+4\varphi_A\cdot\varphi_B\cdot\varphi_C.$$

Выкладки несложные, но проделывать их хлопотно. Покажем, как это можно сделать изящно.

Характеристическая функция принимает только два значения: 0 и 1. Рассмотрим множество {0; 1}, состоящее только из двух элементов 0 и 1. На этом множестве можно определить сумму и произведение элементов. Сумма двух элементов равна нулю, если оба слагаемых равны 0 или оба равны 1. Сумма равна 1, если одно слагаемое равно 1, а другое равно 0. Положим также: $-0=0$, $-1=1$. Произведение равно 1 в единственном случае, когда каждый из сомножителей равен 1, в противном случае оно равно нулю (это обычное произведение целых чисел). Сложение будем обозначать так: $a\oplus b$. В таком множестве выполняются все свойства чисел $1^\circ-8^\circ$, перечисленные в начале статьи. Коммутативность сложения и умножения очевидна. Ассоциативность умножения – это обычный ассоциативный закон умножения целых чисел. Ассоциативность сложения проверяется перебором нескольких случаев.

Полученное множество известно в теории чисел. Оно обозначается $\mathbb{Z}_2$ и называется *кольцом вычетов по модулю* 2 (в теории чисел остатки называются вычетами).

Если рассматривать значения характеристических функций как элементы множества $\mathbb{Z}_2$, то формула (1) принимает вид $\varphi_{A\Delta B} = \varphi_A\oplus\varphi_B$. Теперь совершенно ясно, что

$$\varphi_{(A\Delta B)\Delta C} = (\varphi_A\oplus\varphi_B)\oplus\varphi_C = \varphi_A\oplus(\varphi_B\oplus\varphi_C) = \varphi_{A\Delta(B\Delta C)}.$$

Пользуясь методом математической индукции, формулу (1) можно обобщить на $n$ множеств:

$$\varphi_{A_1\Delta\ldots\Delta A_n} = \varphi_{A_1}\oplus\ldots\oplus\varphi_{A_n}. \qquad (2)$$

Формула (2) позволяет сделать вывод: симметрическая разность $A_1\Delta\ldots\Delta A_n$ состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат *нечетному* количеству множеств из набора $A_1,\ldots,A_n$.

### Формула включений и исключений

В этом разделе мы будем рассматривать только конечные множества. Количество элементов во множестве $A$ мы будем обозначать $n(A)$. Нас будет интересовать количество элементов в объединении $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$ из $n$ множеств.

Легко видеть, что для двух множеств имеет место формула

$$n(A\cup B) = n(A)+n(B)-n(A\cap B).$$

А что получится в случае трех множеств $A$, $B$ и $C$? Давайте и здесь попробуем применить характеристические функции. Пусть $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$, $A\subset U$. Тогда легко видеть, что

$$n(A) = \varphi_A(x_1)+\ldots+\varphi_A(x_N). \qquad (3)$$

Такие суммы обычно обозначают так:

$$n(A) = \sum_{i=1}^{N}\varphi_A(x_i), \text{ или просто } n(A) = \sum_{x\in U}\varphi_A(x).$$

Сначала найдем количество элементов в дополнении, воспользовавшись тем, что $\overline{A\cup B\cup C} = \bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$ (закон де Моргана):

$$n\left(\overline{A\cup B\cup C}\right) = \sum_{x\in U}\varphi_{\overline{A\cup B\cup C}}(x) =$$
$$= \sum_{x\in U}\varphi_{\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}}(x) = \sum_{x\in U}(1-\varphi_A(x))(1-\varphi_B(x))(1-\varphi_C(x)).$$

Раскрывая скобки в последнем выражении, получаем

$$n\left(\overline{A \cup B \cup C}\right) = \sum_{x\in U} 1 - \sum_{x\in U} \left(\varphi_A(x) + \varphi_B(x) + \varphi_C(x)\right) +$$
$$+ \sum_{x\in U} \left(\varphi_{A\cap B}(x) + \varphi_{A\cap C}(x) + \varphi_{B\cap C}(x)\right) - \sum_{x\in U} \varphi_{A\cap B\cap C}(x).$$

Применяя формулу (3), получим

$$n\left(\overline{A \cup B \cup C}\right) = n(U) - n(A) - n(B) - n(C) +$$
$$+ n(A\cap B) + n(A\cap C) + n(B\cap C) - n(A\cap B\cap C). \quad (4)$$

И, наконец,

$$n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap B) -$$
$$- n(A\cap C) - n(B\cap C) + n(A\cap B\cap C). \quad (5)$$

Не будем выписывать эту формулу в общем виде для $n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$, а просто объясним, как она составляется. Сначала включаются все элементы множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, затем исключаются все элементы, принадлежащие по крайней мере двум множествам, потом включаются элементы, принадлежащие по крайней мере трем множествам, и так далее. Полученная формула называется *формулой включений и исключений*. Следующие две задачи мы взяли из книги Н.Я.Виленкина «Комбинаторика».

1) *Решето Эратосфена*. Эратосфен – древнегреческий ученый, который жил в III веке до новой эры в Александрии. Для нахождения всех простых чисел от 1 до $N$ он придумал следующий способ. Из ряда чисел 1, 2, ..., $N$ вычеркивают все числа, делящиеся на два, кроме самой двойки, потом – все числа, кратные трем, кроме самой тройки, затем – кратные пяти, кроме самой пятерки, и т.д. В конце концов останутся все простые числа от 1 до $N$. Так как во времена Эратосфена писали на восковых табличках и не вычеркивали, а выкалывали цифры, то табличка после такого процесса напоминала решето. Поэтому такой метод получил название «решето Эратосфена».

Подсчитаем, сколько останется чисел в первой тысяче, если мы по методу Эратосфена вычеркнем числа, делящиеся на 2, на 3 и на 5. Пусть $A$ – множество всех натуральных чисел от 1 до 1000, делящихся на 2, $B$ – множество чисел, делящихся на 3, $C$ – множество чисел, делящихся на 5. Надо найти количество чисел во множестве $\overline{A\cup B\cup C}$. Имеем последовательно: $n(A) = 500$, $n(B) = 333$, $n(C) = 200$, $n(A\cap B) = 166$, $n(A\cap C) = 100$, $n(B\cap C) = 66$, $n(A\cap B\cap C) = 33$. По формуле (4) находим 1000 – 500 – 333 – 200 + + 166 + 100 + 66 – 33 = 266. Итак, останется 266 чисел.

2) Девочка Маня отправляла письма пятерым знакомым мальчикам. Написав письма и подписав конверты, она так утомилась, что вложила письма в конверты наудачу. Подсчитайте, во скольких случаях она сделала полную путаницу, т.е. так, что никто не получил бы письма, адресованного именно ему.

Эту задачу можно сформулировать следующим образом. Берутся все перестановки из 5 чисел 1, 2, 3, 4, 5. Во скольких из них ни одно число не стоит на своем месте? Обозначим через $A_i$ множество перестановок, в которых число $i$ стоит на своем месте. Тогда $A_i \cap A_j$ – множество перестановок, в которых $i$ и $j$ стоят на своих местах, а $A_i\cap A_j\cap A_k$ – множество перестановок, в которых $i$, $j$ и $k$ стоят на своих местах, и так далее. В данном случае задача облегчается тем, что множества $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$ совершенно равноправны. Поэтому

$$n(A_i) = 4! = 24, \quad n\left(A_i \cap A_j\right) = 3! = 6,$$
$$n\left(A_i \cup A_j \cap A_k\right) = 2! = 2,$$
$$\left(A_i \cup A_j \cap A_k \cap A_l\right) = 1! = 1 = n\left(A_i \cup A_j \cap A_k \cap A_l \cap A_m\right),$$

где $i$, $j$, $k$, $l$, $m$ – попарно различные натуральные числа от 1 до 5. Теперь по формуле (4) получаем ответ: $n\left(\overline{A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5}\right) = 44$, т.е. в 44 случаях из 120 ни один из адресатов не получил бы письма, адресованного ему.

*Ответ:* $5! - C_5^1 \cdot 4! + C_5^2 \cdot 3! - C_5^3 \cdot 2! + C_5^4 \cdot 1! - C_5^5 = 44$.

(Значок $C_5^n$ обозначает количество способов выбрать $n$ цифр из 1, 2, 3, 4, 5. Например, $C_5^1 = 5$, $C_5^2 = 10$.)

**Упражнения**

**5.** Докажите: $A\setminus(B\setminus C) = (A\setminus B)\cup(A\cap C)$.

**6.** Докажите: $(A\setminus B)\setminus C = (A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$.

**7.** Докажите: $(A\setminus B)\cap C = (A\cap C)\setminus(B\cap C) = (A\cap C)\setminus B$.

**8.** Верно ли равенство: $A\cup(B\setminus C) = (A\cup B)\setminus C$? (*Ответ*: нет.)

**9.** Докажите, что следующие два включения равносильны:

$$A\setminus B\subset C \Leftrightarrow A\subset B\cup C.$$

**10.** Докажите: $A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

**11.** Докажите: $A\Delta B\subset(A\Delta C)\cup(B\Delta C)$.

**12** (Н.Я.Виленкин). По пустыне идет караван из 9 верблюдов. Путешествие длится много дней, и наконец всем надоедает видеть впереди себя одного и того же верблюда. Сколькими способами можно переставить верблюдов так, чтобы впереди каждого верблюда шел другой, чем раньше? (*Ответ*: 148329.)

## Как растянуть мгновение

*(Начало см. на 4-й странице обложки)*

достаточно иметь снимок падающего снега на темном фоне без вспышки. На рисунке 3 приведена фотография, сделанная с выдержкой 1/80 с. На фоне темной куртки моего внука видны многочисленные следы падающих снежинок, наклоненные под углом $20-25°$. Если считать, что в горизонтальном направлении снежинки движутся со скоростью ветра, а ширина оранжевой лямки рюкзака на плече равна 6 см, то средняя горизонтальная проекция следов снежинок окажется близкой к 8 см. Это означает, что средняя скорость ветра в данном направлении составляет

$$0{,}08\ \text{м} \cdot 80\ 1/\text{с} = 6{,}4\ \text{м/с}.$$

*К.Богданов*

*Рис. 3*

# Орало и крыло

В.ВЫШИНСКИЙ, А.СТАСЕНКО

*Долго, в течение многих кругов обращения солнца,*
*Жизнь проводил человек, скитаясь, как дикие звери,*
*Твердой рукой никто не работал изогнутым плугом ...*

Тит Лукреций Кар. О природе вещей

Однако, наступило-таки время, когда «изогнутый плуг» пришел на поля. Его давнейшие формы известны по египетским и вавилонским изображениям, по рисункам на скалах в северной Италии и южной Швеции, относящимся ко второму тысячелетию до н.э., по изображениям на греческих вазах середины первого тысячелетия до н.э. ... В русских былинах он называется *ра́ло*, или *ора́ло*, так что понятен смысл слов «о́рет в поле пахарь» (не путать оратая с оратором, а пашню с ораторией!).

А крыло получило широкое распространение совсем недавно – как сказал бы физик, порядка сотни лет назад.

Плуги и крылья бывают разные. Известны, например, современные плуги – общего назначения и специального (кустарниково-болотные, садовые, виноградниковые); лущильники и плантажные: лемешные и дисковые, с правооборачивающими и левооборачивающими корпусами. А крылья встречаются прямые, эллиптические, стреловидные, треугольные и даже с продольной круткой (вспомним «изогнутый плуг» у Лукреция).

Но что общего у плуга и крыла? Прежде всего – взаимодействие со средой. А при этом, разумеется, возникает *сила взаимодействия.* Эту силу разумно представить в виде двух взаимно перпендикулярных векторов: силы сопротивления, направленной против вектора скорости, и подъемной силы (ради которой и изобрели крыло), направленной перпендикулярно скорости.

Во многих классических задачах предлагается считать, что сила сопротивления среды движущемуся в ней телу пропорциональна первой степени скорости движения, Это так называемое *вязкое сопротивление*. Для микробов, движущихся в воде, сила вязкого трения весьма существенна: если микроб перестанет двигаться, он затормозится на характерном расстоянии порядка размеров самого микроба, т.е. почти мгновенно. Вязкое трение определяет и поверхностное трение корпуса самолета, связанное с пограничным воздушным слоем, толщина которого много меньше размеров самолета.

Но для самолета еще большую роль играет *аэродинамическая сила* лобового сопротивления $F_а$, пропорциональная плотности воздуха $\rho$, квадрату скорости движения относительно воздуха $v$ и площади поперечного сечения $S$:

$$F_а \sim \rho v^2 S .$$

Проверим, по крайней мере, ее размерность:

$$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\cdot\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2\cdot\text{м}^2 = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н} .$$

А вот для бруска, лежащего на шероховатой поверхности, важна сила *сухого трения*. В принципе, она тоже зависит от скорости: в начале движения из состояния покоя она максимальна, обозначим ее $F_0$, а в установившемся режиме немного уменьшается, но чаще всего ее считают постоянной.

Оказывается, в теории плуга важны все перечисленные силы:

$$F = F_0 + av + bv^2 ,$$

где $a$ и $b$ – некоторые коэффициенты. Отсюда видно, что на первых порах нужна сила, которая позволяет сдвинуть плуг из состояния покоя (когда $v = 0$); затем, при небольших скоростях (когда квадрат скорости еще пренебрежимо мал), «включается» вязкое сопротивление; наконец, когда скорость движения становится значительной, последнее слагаемое (аэродинамическая сила) оказывается определяющим. На рисунке 1 изображена качественная зависимость каждой из этих сил от скорости движения, при желании вы можете нарисовать и их сумму.

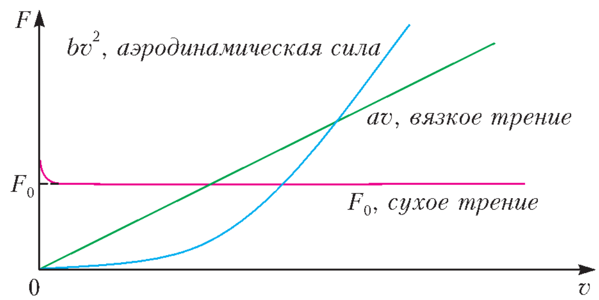



*Рис.1. Зависимость сил сопротивления от скорости плуга*

(А не вспомнить ли еще и токарный резец, вспарывающей металл в виде спиральной стружки? Но, не все сразу.)

Заметим, что приведенные здесь зависимости не являются точными законами физики, а представляют собой феноменологические выражения, основанные на опыте и приближенно описывающие сопротивление в некоторых диапазонах скоростей.

Но, разумеется, и плуг и крыло служат вовсе не для того, чтобы испытывать сопротивление.

Классический плуг должен перевернуть пласт земли, но для этого его нужно приподнять на некоторую высоту – как тут не вспомнить потенциальную энергию $mgh$. Когда перевернутый пласт чернозема шлепается за плугом, вся его потенциальная энергия и энергия трения вращения переходят в тепло (рассеиваются).

А крыло имеет задачу создать подъемную силу, т.е. поток импульса воздуха, направленный вниз и равный весу самолета. Однако на место отброшенного вниз воздуха поступает сверху новая порция – вот и возникают два индуцируемых, «присоединенных», вихря, которые тянутся за самолетом от самого момента взлета. В результате при полете в атмосфере «платой» за создание подъемной силы является возникновение еще так называемого *индуктивного сопротивления* $F_и$ . Для горизонтального полета (когда подъемная сила равна весу) полное сопротивление равно

$$F_{полн} = F_а + F_и = cv^2 + \frac{d}{v^2} ,$$

где $c$ и $d$ – некоторые коэффициенты (рис.2). Чем медленнее

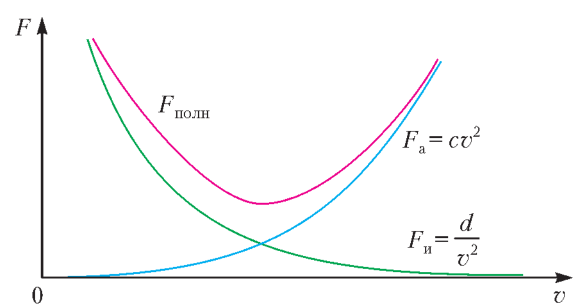



*Рис.2. Зависимость полного сопротивления от скорости самолета*

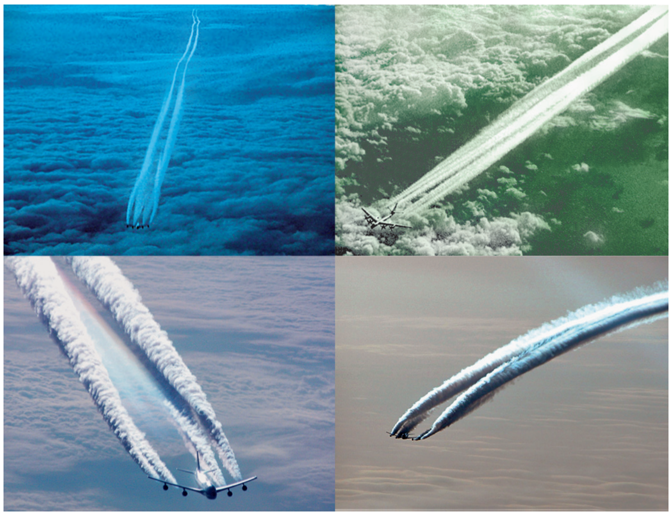


Рис.3. Вихревые следы за самолетом

летит самолет, тем меньше его лобовое сопротивление и вязкое трение (ведь они пропорциональны $v^2$ и $v$ соответственно), но тем мощнее должен быть присоединенный вихрь. Вот и получается, что плата за создание подъемной силы неподвижным крылом ($v \to 0$) становится непомерной: $F_{\text{полн}} \to \infty$.

Куда же уходит затраченная энергия? Она формирует вихревой след и рано или поздно возвращается в атмосферу. «Пахари неба» – так иногда называют самолеты. Они «пашут небо», чтобы взросли всходы радости от встреч между людьми на земле. На рисунке 3 показана визуализация вихревого следа самолета либо за счет конденсации паров воды, либо при помощи специальных «дымарей». Как это похоже на борозду за плугом в чистом поле! Ведь если плуг переворачивает (т.е. вращает) пласт земли, то при этом тоже возникает циркуляция скорости пласта. Только в случае плуга эта циркуляция после переворота исчезает, а за самолетом закрученные массы воздуха вращаются несколько минут, постоянно затухая и «растворяясь» в турбулентных пульсациях атмосферы.

А еще сила взаимодействия крыла и среды зависит от угла атаки $\alpha$ – угла между направлением скорости набегающего потока и плоскостью крыла (рис.4). Этот угол как раз и входит в коэффициенты, написанные выше. Для самолета этот угол имеет положительный знак, для плуга – очевидно, отрицательный, чтобы плуг не всплывал, а зарывался в землю. Впрочем – лишь до нужной глубины, а иначе оратаю придется налегать на плуг всем своим весом.

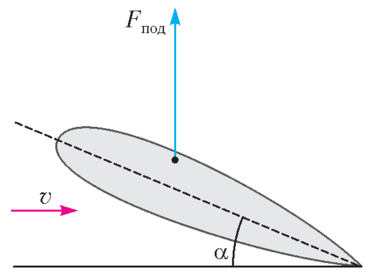



Рис.4. Положительный угол атаки, при котором создается подъемная сила крыла $F_{\text{под}}$

Наконец, вспомним древнюю мудрость, идущую из Евангелия: «возложивши длань (руку) на рало, не оглядываются вспять (назад)». Это равносильно призыву не изменять принятого решения. Поэтому, не колеблясь, поступайте на факультет аэродинамики и летательной техники Московского физико-технического института (МФТИ), где вы узнаете, по крайней мере, все о крыле. Правда, не скроем: учиться здесь нелегко. Как говорят студенты, «пахать надо!»

# Эта манящая глубина

**А.СТАСЕНКО**

Как только отличник узнал, что газы сжимаемы, а давление воды растет с глубиной, он подумал: ведь этак можно не бессмысленно нырять, а измерять глубину погружения!

Действительно, если взять мензурку (длинный цилиндрический стакан с делениями) и перевернуть ее вверх дном, то ведь воздух из нее не «выльется». Коснувшись открытым краем поверхности воды (рис.1, верхняя часть), мы «запрем» этот воздух в объеме мензурки $V_0 = Sx_0$. Здесь $S$ – площадь поперечного сечения, $S = \pi r^2$, где $r$ – внутренний радиус мензурки, а $x_0$ – длина мензурки. При этом давление воздуха внутри мензурки останется равным атмосферному давлению $p_0 = 10^5$ Па. Теперь, если медленно погружать мензурку в воду (рис.1, нижняя часть), поверхность воды будет играть роль поршня, сжимающего газ. Но почему медленно? А чтобы температура воздуха внутри успевала достигать значения снаружи – тогда процесс сжатия окажется изотермическим и будет просто описываться законом Бойля–Мариотта

$$p_0V_0 = pV\text{, или}$$

$$p_0Sx_0 = (p_0 + \rho gh)Sx\,.$$

Здесь $x$ – длина внутреннего цилиндрического объема $V = Sx$ сжатого воздуха, давление которого увеличилось на $\rho gh$ при погружении на глубину $h$. Из этого уравнения найдем

$$\frac{x}{x_0} = \frac{1}{1 + (\rho gh/p_0)}\,.$$

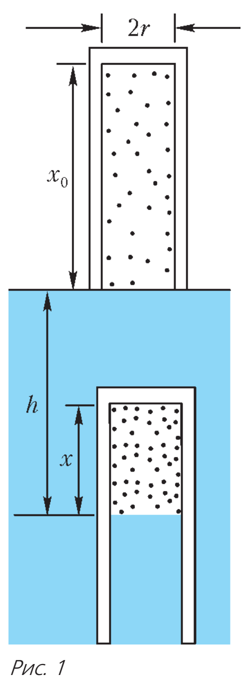



Рис. 1

Подставляя значения плотности воды $\rho = 10^3$ кг/м$^3$, ускорения свободного падения $g = 10$ м/с$^2$, получим, что на глубине $h = 10$ м давление увеличилось на $\rho gh = 10^5$ Па, т.е. возросло вдвое. Значит, объем воздуха в пробирке уменьшится в два раза. А на глубине $h = 20$ м давление уже утроится и так далее. В результате мензурку можно «проградуировать» по глубине согласно рисунку 2. И – пользуйтесь на здоровье новым глубиномером!

Правда, если температура будет изменяться с глубиной, то произведение $pV$ уже не будет постоянной величиной и нужно будет использовать закон Менделеева–Клапейрона

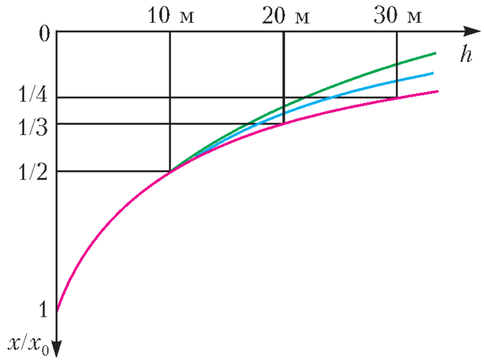



Рис. 2

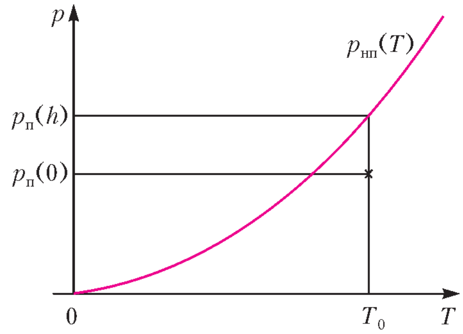



Рис. 3

$pV = \nu RT(h)$. «Ну что же, – вздохнул Отличник, – прикрепим к мензурке термометр и введем поправку на температуру...»

Но тут старший брат Отличника стал сеять новые зерна сомнения: а ведь воздух содержит пары воды, особенно над морем. И если даже их давление $p_п(0)$ у поверхности ($h_0 = 0$) не достигало насыщения, то при сжатии в пробирке оно возрастет, и на глубине пар может-таки стать насыщенным, т.е. $p_п(h) = p_{нп}(T_0)$ (рис.3). А при дальнейшем погружении пар начнет «выпадать» в осадок, т.е. конденсироваться, превращаясь в воду. Значит, суммарная масса газовой смеси в пробирке будет убывать, и наш прибор будет показывать большую глубину, чем есть на самом деле (см. синюю кривую на рисунке 2).

«И это еще не все, – продолжал сеять сомнения Брат. – Ведь и сам воздух растворим в воде». Причем, как известно, растворимость газов в жидкости растет с давлением. Доказательств – сколько угодно. Откройте бутылку газированной воды – и увидите пузырьки, внезапно возникшие при резком сбросе давления. Спросите у водолазов – почему они должны всплывать очень медленно? А потому, чтобы азот – часть воздуха, которым они дышат, – растворившись в крови, не вскипал пузырьками (в случае резкого подъема). Значит, не только водяной пар, но и воздух в мензурке при погружении может все более растворяться в воде, и наш прибор станет «врать» еще бессовестнее (см. зеленую кривую на рисунке 2).

Да, но ведь с увеличением глубины и с соответствующим ростом давления сама мензурка должна деформироваться, как всякое упругое тело. Кроме того, в наших рассуждениях принималось, что плотность и давление воздуха внутри мензурки одинаковы по высоте. А между тем известно, что эти величины уменьшаются с высотой, в принципе – на любом конечном расстоянии. Ведь предлагал же знаменитый Фаренгейт брать в горы чайник и по температуре его вскипания определять давление атмосферы и, следовательно, высоту подъема.

«А учли ли вы еще и соленость воды, которая тоже может изменяться с глубиной, впрочем, как и ее плотность?» – спросил сидевший недалеко рыбак.

Но Отличник уже надел ласты. Он понял, что любые измерения – это сложный процесс, включающий много физических явлений. И что надо много учиться.

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

# Второй закон Ньютона для трехмерного пространства

Б.МАКУШЕВ

Основной задачей динамики является нахождение уравнения движения материальной точки, если известны ее масса и действующие на нее силы. Если равнодействующая всех приложенных к телу сил $\sum \vec{F}_i$ отлична от нуля, то тело массой $m$ приобретает ускорение $\vec{a}$. При этом векторная сумма всех приложенных к телу сил равна произведению массы на ускорение тела:

$$\sum \vec{F}_i = m\vec{a}.$$

Это и есть второй закон Ньютона. Характерным свойством этого закона является его векторный характер. Поскольку равнодействующая сила прямо пропорциональна ускорению, их направления всегда совпадают.

В большинстве случаев при изучении второго закона Ньютона рассматриваются примеры, когда силы действуют на точку (или тело) вдоль прямой – одномерное пространство или в плоскости – двухмерное пространство. Однако очевидно, что этот закон выполним и для трехмерного пространства.

Рассмотрим несколько конкретных примеров на применение второго закона Ньютона, когда на тело действуют силы, ориентированные в пространстве.

**Пример 1.** *Небольшой кубик массой $m = 100$ г покоится на плоскости, наклоненной к горизонту под углом $\alpha = 30°$ (рис.1). Коэффициент трения кубика о плос-*

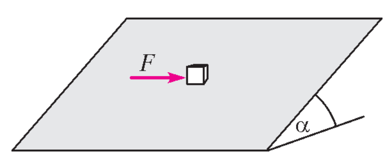



Рис. 1

*кость* $\mu = 0,8$. *Определите минимальную горизонтальную силу F, с которой нужно толкать кубик, чтобы он начал двигаться. Сила действует в плоскости склона.*

На кубик будут действовать четыре силы (рис.2). Первая сила – это сила $\vec{F}$, направленная параллельно образующей

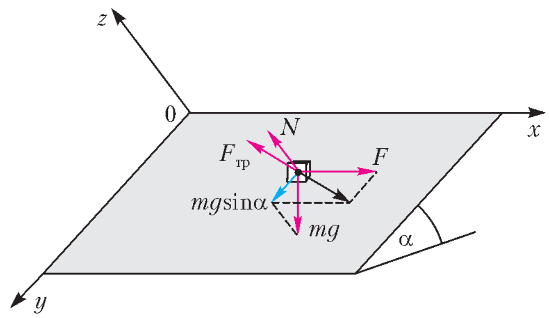



Рис. 2

наклонной плоскости (линии пересечения плоскости с горизонтальной поверхностью). Вторая сила – это сила тяжести $m\vec{g}$, она направлена вертикально вниз к центру Земли. Третья сила – это сила реакции наклонной плоскости $\vec{N}$, которая направлена перпендикулярно плоскости. А четвертая сила – это сила трения $\vec{F}_{тр}$, она лежит в плоскости склона, но пока неизвестно ее точное направление. Ясно, что все эти четыре силы ориентированы в пространстве.

Запишем уравнение второго закона Ньютона в виде

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = 0,$$

так как по условию задачи $\vec{a} = 0$. Теперь нужно выбрать такую плоскость, на которую можно было бы проектировать все эти силы. Нам не удобны плоскости, в которых лежат силы тяжести или реакции плоскости, потому что нам не известно истинное направление силы трения и мы не можем проектировать ее на эти плоскости. Очевидно, что самой удобной для проектирования сил является наклонная плоскость, где расположен кубик. В этой плоскости могут лежать силы $\vec{F}$, $\vec{F}_{тр}$ и составляющая силы тяжести, равная $mg\sin\alpha$ (см. рис.2). Для удобства будем считать эту проекцию некоей самостоятельной силой, действующей на брусок в направлении оси $y$. Силы $\vec{F}$, $\vec{F}_{тр}$ и выбранную составляющую силы тяжести назовем *активными силами*, так как именно они приводят кубик в движение. Поскольку мы ищем предельное условие равновесия, сила трения покоя достигает своего максимального значения:

$$F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha.$$

Эта сила уравновешивает равнодействующую двух взаимно перпендикулярных сил – силы, с которой нужно толкать кубик, и составляющей силы тяжести кубика. Следовательно, мы можем записать

$$F_{тр}^2 = F^2 + (mg\sin\alpha)^2,$$

откуда находим

$$F = \sqrt{F_{тр}^2 - (mg\sin\alpha)^2} = mg\sqrt{(\mu\cos\alpha)^2 - \sin^2\alpha} = 0,48 \text{ Н}.$$

**Пример 2.** *Кирпич массой m скользит по наклонной плоскости вдоль линейки, которая расположена под углом* $\varphi$ *к горизонтальной линии плоскости. Плоскость образует с горизонтом угол* $\alpha$. *Начальная скорость кирпича равна нулю. С каким ускорением будет двигаться кирпич вниз вдоль линейки, если: а) линейка гладкая, а коэффициент трения между плоскостью и кирпичом равен* $\mu_1$; *б) наклонная плоскость гладкая, а линейка шероховатая и коэффициент трения между кирпичом и линейкой равен* $\mu_2$.

Сначала нарисуем все силы, действующие на кирпич, в трехмерной координатной системе (рис.3). На кирпич действуют следующие силы: $\overrightarrow{mg}$ – сила тяжести, направленная

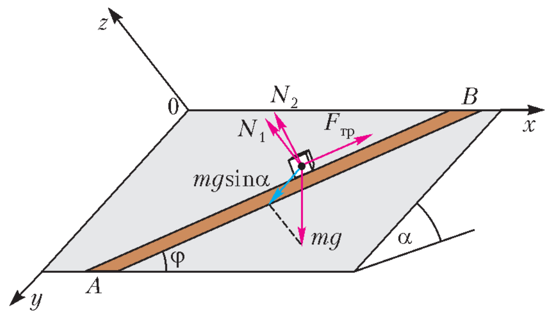



Рис. 3

вертикально вниз к центру Земли; $\vec{N}_1$ – сила реакции наклонной плоскости, направленная перпендикулярно плоскости; $\vec{F}_{тр}$ – сила трения, которая направлена вдоль линейки против движения кирпича и лежит в плоскости; сила реакции линейки $\vec{N}_2$, перпендикулярная линейке и лежащая в плоскости.

Запишем второй закон Ньютона для движения кирпича:

$$\overrightarrow{mg} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{тр} + \vec{N}_2 = m\vec{a}.$$

Как и в предыдущем примере, выберем оси координат так, чтобы плоскость $xy$ совпала с нашей наклонной плоскостью. На этой плоскости нарисуем «активные силы», действующие на кирпич (рис.4). К ним относятся составляющая силы тяжести, равная $mg\sin\alpha$, сила трения $\vec{F}_{тр}$ и сила реакции линейки $\vec{N}_2$.

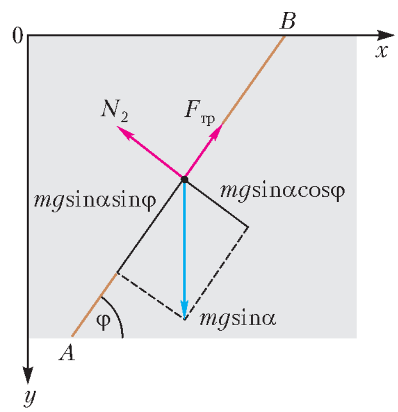



Рис. 4

а) Если кирпич скользит вниз по гладкой линейке $AB$, то сила трения со стороны плоскости направлена вверх по линейке (см. рис.4) и равна

$$F_{тр} = \mu_1 mg\cos\alpha,$$

а проекция нашей составляющей силы тяжести кирпича на линейку $AB$ равна

$$mg\sin\alpha\sin\varphi.$$

При этом сила реакции линейки уравновешена проекцией нашей составляющей силы тяжести кирпича на направление, перпендикулярное линейке:

$$N_2 = mg\sin\alpha\cos\varphi.$$

Таким образом, ускорение кирпича, направленное вниз вдоль линейки, равно

$$a = g(\sin\alpha\sin\varphi - \mu_1\cos\alpha),$$

причем должно выполняться условие $\mu_1 < \operatorname{tg}\alpha\sin\varphi$.

б) Если плоскость гладкая, а линейка шероховатая, то сила трения действует со стороны линейки и равна

$$F_{тр} = \mu_2 mg\sin\alpha\cos\varphi.$$

Тогда ускорение кирпича будет равно

$$a = g\sin\alpha\left(\sin\varphi - \mu_2\cos\varphi\right).$$

В этом случае должно выполняться условие $\mu_2 < \operatorname{tg}\varphi$.

**Пример 3.** *По тонкой и твердой проволочной спирали, образующей винтовую линию и стоящей вертикально, скользит нанизанная на проволоку бусинка. Радиус петли спирали R, шаг спирали (расстояние по вертикали между соседними витками) h. Найдите установившуюся скорость бусинки v, если коэффициент трения ее о проволоку равен* $\mu$.

Нарисуем все силы, действующие на бусинку (рис.5). Поскольку эти силы ориентированы в трехмерном пространстве, построим координатную систему $xyz$, оси которой взаимно перпендикулярны. В начале координат поместим бусинку. Считаем, что сечение проволоки круглое. Тогда бусинка при движении касается проволоки только в одной точке, которая является точкой приложения силы реакции $\vec{N}$ (рис.6). Эту силу удобно представить как сумму двух взаимно перпендикулярных сил, т.е.

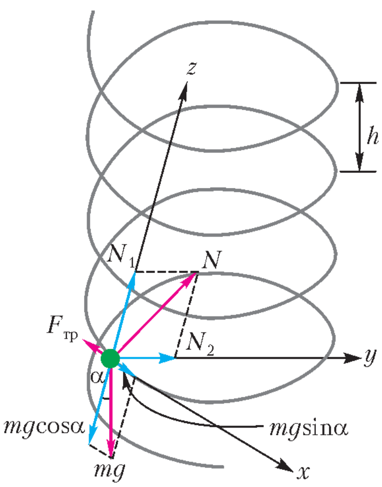


Рис. 5

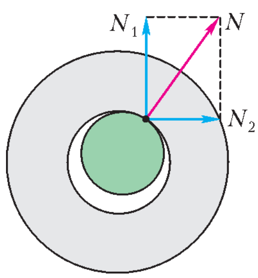


Рис. 6

$$N^2 = N_1^2 + N_2^2.$$

Здесь $\vec{N}_1$ – это сила реакции, возникшая вследствие действия веса бусинки на проволоку, поэтому

$$N_1 = mg\cos\alpha.$$

Сила $\vec{N}_2$ направлена в центр петли спирали – окружности радиусом $R$, она сообщает бусинке центростремительное ускорение (рис.7):

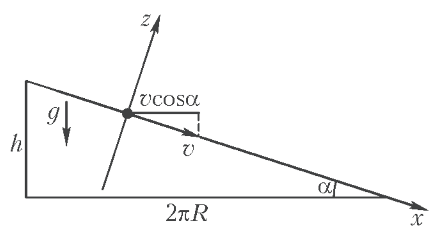


Рис. 7

$$N_2 = \frac{m\left(v\cos\alpha\right)^2}{R}.$$

Из рисунка 7 найдем

$$\sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{(2\pi R)^2 + h^2}} \quad \text{и} \quad \cos\alpha = \frac{2\pi R}{\sqrt{(2\pi R)^2 + h^2}}.$$

Поскольку скорость бусинки установилась, сила трения и проекция силы тяжести бусинки на ось $x$ равны:

$$\mu N = mg\sin\alpha.$$

Но

$$N^2 = N_1^2 + N_2^2 = \left(mg\cos\alpha\right)^2 + \left(\frac{mv^2\cos^2\alpha}{R}\right)^2.$$

Отсюда находим

$$v = \frac{\sqrt{Rg}}{\cos\alpha}\left(\left(\frac{\sin\alpha}{\mu}\right)^2 - \cos^2\alpha\right)^{1/4} \quad \text{при } \operatorname{tg}\alpha > \mu.$$

**Пример 4.** *Математический маятник, представляет собой массивный маленький кубик массой m, прикрепленный к нити длиной l. Маятник находится на абсолютно гладкой поверхности, наклоненный под углом* $\theta$ *к вертикали (рис.8). Нужно найти частоту малых колебаний математического маятника на этой поверхности.*

В положении равновесия на кубик действует три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз; сила натяжения нити $\vec{T}$; сила реакции плоскости $\vec{N}$, перпендикулярная этой плоскости (см. рис.8). Очевидно, что самой удобной для проектирования сил является наклонная плоскость, где расположен кубик (рис.9). В этой плоскости

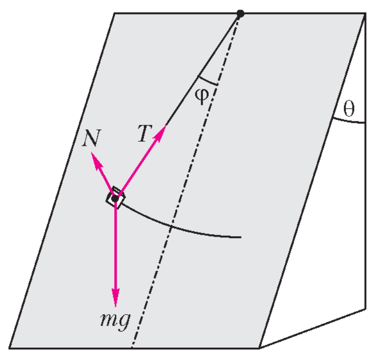


Рис. 8

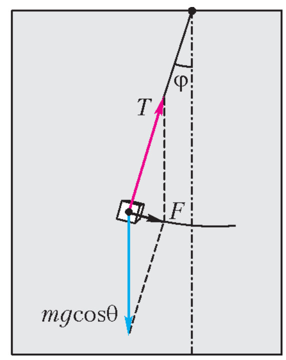


Рис. 9

лежат сила натяжения нити $\vec{T}$ и составляющая силы тяжести кубика, равная $mg\cos\theta$. Эти силы являются «активными силами», благодаря им грузик может совершать колебания на гладкой плоскости. Действительно, при отклонении нити от равновесия на небольшой угол $\varphi$ на кубик действует проекция составляющей силы тяжести, равная $F = mg\cos\theta\sin\varphi$ и призванная *возвращать* кубик в положение равновесия. Считая колебания малыми, можем написать

$$\sin\varphi = \frac{x}{l},$$

где $x$ – длина дуги окружности, вдоль которой движется кубик. Тогда

$$F = -\frac{mg\cos\theta}{l}x$$

– возвращающая сила прямо пропорциональна смещению $x$ кубика из положения равновесия и направлена в сторону, противоположную этому смещению. Принимая во внимание свойства квазиупругой силы, а именно

$$F = -kx,$$

находим собственную частоту малых колебаний математического маятника на наклонной плоскости:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{mg\cos\theta}{l}}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}\cos\theta}.$$

Подумайте, что изменится, если плоскость будет шероховатой.

# Сколько можно ждать?

## (Как практически оценить время вынужденного бездействия)

### И.АКУЛИЧ

В 1863 ГОДУ БЫЛА ЗАПУЩЕНА В ЭКСПЛУАТАЦИЮ ПЕРВАЯ линия Лондонского метро, и потому совсем недавно все прогрессивное подземное человечество (т.е. те, кто пользуется указанным видом транспорта) отмечало его 150-летний юбилей. По этому поводу имело место немало статей в различных периодических изданиях. В частности, проводилось сравнение Лондонского метро с Московским. Что-то было одинаково, что-то заметно различалось. Оказалось, и тут, и там на станциях имеется табло, отсчитывающее минуты и секунды, но с существенной разницей: если в Москве это табло показывает время, *прошедшее после ухода очередного поезда*, то в Лондоне оно, наоборот, показывает, *сколько осталось до прихода следующего поезда*. Понятно, что последнее намного удобней – какое нам дело до поезда, на который мы все равно не попали? Это что-то вроде прошлогоднего снега. А вот сколько нам еще ждать и вынужденно слоняться по перрону – знать бы не мешало. [1]

Тем не менее, можно попробовать оценить эту величину, используя лишь ту информацию, которая имеется. Конечно, если линия, которой мы пользуемся, нам хорошо знакома, то мы знаем и средний интервал движения, так что, вычитая из него показания табло, легко определим примерное время ожидания. Индикатором его может служить и количество скопившихся пассажиров на платформе: чем оно более угрожающее, тем меньше времени, скорее всего, осталось до прибытия поезда.

Ну, а если всего этого нет? Спустились мы, допустим, первый раз под землю в незнакомом городе, да еще поздно вечером, когда пассажиров-то раз, два и обчелся. На табло видим, допустим, время: 03:15, т.е. 3 минуты 15 секунд. Сколько еще ждать? И здесь на помощь приходят вероятностно-статистические рассуждения. Пусть средний интервал движения поездов равен $T$. Мы попадаем на станцию, несомненно, в случайный момент времени, и после ухода предыдущего поезда могло пройти время от 0 до $T$. *Среднее* значение этого времени, очевидно, равно $T/2$. Поэтому имеет смысл предположить, что $T/2 = 3$ минуты 15 секунд. А ждать осталось (опять же *в среднем*) столько же, т.е. те же $T/2$. Итак, оценочное значение времени ожидания составляет ту же величину, которую мы видим на табло! Конечно, оценка довольно грубая, но все же лучше, чем ничего.

Как ни странно, ее можно улучшить (конечно, только в *статистическом* смысле). [2] Поезда метро ходят в двух направлениях, и средний интервал движения в обе стороны, естественно, одинаков (иначе произойдет скопление транспортных средств в одном конце тоннеля). [3] Итак, мы вышли на платформу и увидели, что с момента ухода нужного нам поезда прошло $t_1$ минут. Тогда, согласно оценке (см. выше), интервал движения равен $T = 2t_1$. Не поленимся, перейдем на другую сторону платформы и посмотрим, сколько прошло времени там. Естественно, мы увидим какое-то другое время $t_2$. Так как интервал в обоих направлениях одинаков, то оценочно $T = 2t_2$. Ясно, что наиболее разумной «итоговой» оценкой для действительной величины $T$ является среднее арифметическое указанных величин, т.е. $T = t_1 + t_2$. Сколько же нам в таком случае осталось скучать на платформе? Очевидно, это время равно разности между интервалом движения и тем временем, которое уже прошло, т.е. $T - t_1 = (t_1 + t_2) - t_1 = t_2$. Вот тебе и раз! Оказывается, чтобы оценить время вынужденного бездействия, следует посмотреть на табло *противоположного направления*, а «свое» табло нам вообще не нужно!

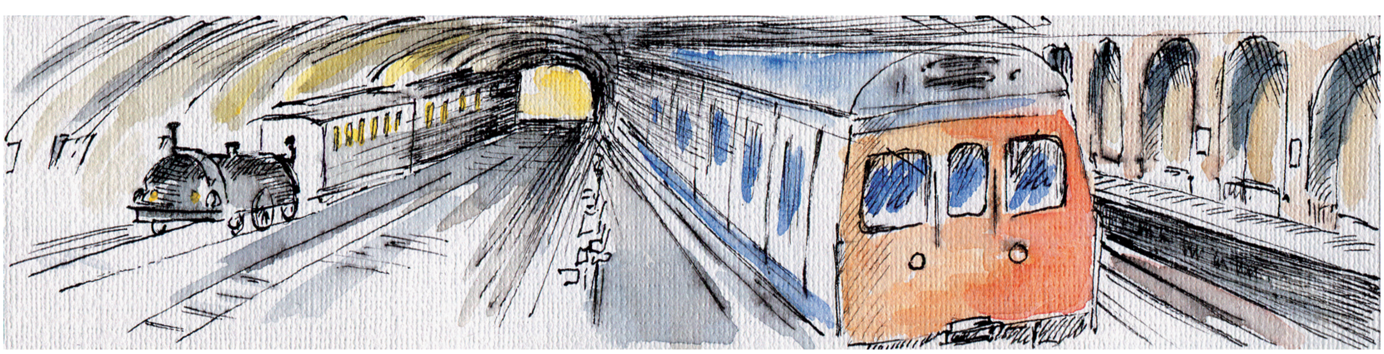
Несколько иной подход приходится использовать, если мы выбрались из-под грешной земли на ее поверхность и стоим на остановке общественного транспорта, например автобуса. Как правило, на табличке указан только средний интервал движения для каждого маршрута (в минутах). [4] Если нам подходит только один маршрут из имеющихся, то все очень просто. Пусть, к примеру, указано, что интервал движения нужного автобуса – 10 минут. Как и в

[1] Впрочем, несколько оправдательных патриотических слов сказать можно. В Москве на многих линиях (особенно в часы пик) еще виден хвост уходящего поезда, а с противоположной стороны тоннеля уже светятся фары нового. Так что любоваться табло порой просто некогда – надо бежать на посадку! А в Лондоне, согласно тем же публикациям, на некоторых линиях интервал движения достигает получаса.

[2] При этом не будем забывать крылатые слова, чаще всего приписываемые 40-му премьер-министру Великобритании Б.Дизраэли: «Существует три вида лжи: ложь, наглая ложь и статистика». Поэтому давайте здесь и далее отнесемся к нашим оценкам по возможности мягко и снисходительно.

[3] Очевидным исключением из этого правила является, конечно, *кольцевая линия*, где поезда в каждом из направлений вполне могут ходить с разными интервалами.

[4] Хотя в последнее время и на наземных остановках появились световые табло с указанием, сколько времени *осталось* до прихода следующего автобуса, а кое-где встречается и просто расписание движения. Но нам такие варианты неинтересны – гадать здесь не о чем!



метро, среднее время ожидания равно его половине, т.е. 5 минутам. Проще некуда!

Ну, а если нас устраивают *два* номера автобуса, с интервалами, допустим, 10 и 15 минут? Каков будет «суммарный» интервал? Большинство людей импульсивно отвечают: средний арифметический, т.е. в данном случае – 12,5 минут, так что среднее время ожидания – чуть больше 6 минут. Разумеется, такой ответ неверен. Посудите сами: если ходит только один автобус, то время ожидания – 5 минут, а если к нему добавить второй – то на минуту с лишком больше. Явная бессмыслица!

Для правильного решения здесь удобней всего определить среднее количество автобусов каждого маршрута за какой-нибудь одинаковый промежуток времени, например – час. Поскольку в каждом часе 60 минут, то «10-минутных» автобусов за час пройдет 60 : 10 = 6 штук, а «15-минутных» 60 : 15 = 4. Итого получаем 6 + 4 = 10 автобусов в час. Поэтому средний интервал составит всего 60 : 10 = 6 минут, и среднее время ожидания сокращается до $6/2 = 3$ минут.

Рассуждая так же, нетрудно найти и общую формулу, если интервалы движения автобусов равны $T_1$ и $T_2$. «Суммарный» интервал равен

$$T = \frac{1}{\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}} = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$$

(при вычислениях длина выбранного промежутка времени – например, 60 минут – сокращается).

Если же подходящих маршрутов больше и интервалы их движения равны $T_1$, $T_2$, ..., $T_n$, то формула естественным образом усложняется (но, в принципе, остается несложной):

$$T = \frac{1}{\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \ldots + \frac{1}{T_n}}.$$

Скажите, эти формулы вам ничего не напоминают? Конечно, напоминают! Именно таким способом подсчитываются сопротивление участка электрической цепи, в которой *параллельно* подключены проводники сопротивлениями $T_1$, $T_2$, ..., $T_n$. Таким образом, каждый маршрут – аналог параллельно подключенного проводника, интервал – аналог сопротивления, а количество автобусов за выбранный промежуток времени – аналог протекающего тока. Такой подход делает картину абсолютно наглядной.

Наглядной-то наглядной, но... неверной! Или, мягче говоря, *неточной*. И чтобы в этом убедиться, рассмотрим такой пример. Пусть нас устраивают автобусы лишь двух маршрутов с одинаковым интервалом движения – 10 минут. Тогда, согласно «электрической» формуле, величина среднего интервала составляет $\frac{10 \cdot 10}{10 + 10} = 5$ минут, а среднее время ожидания – вдвое меньше, т.е. 2 минуты 30 секунд. Заметим, что этот ответ верен, если автобусы одного маршрута подходят к остановке ровно в серединах промежутков между автобусами второго маршрута (т.е. скажем, автобусы первого маршрута приходят в 10:00, 10:10, 10:20, ..., а второго – в 10:05, 10:15, 10:25, ...). Если же автобусы обоих маршрутов курсируют абсолютно синхронно (т.е. подъезжают к остановке «парами» в одни и те же моменты времени), то для нас такой график движения равносилен просто наличию единственного маршрута с интервалом 10 минут, так что время ожидания «подскакивает» аж до 5 минут! Понятно, что при промежуточных сдвигах между моментами прибытия автобусов разных маршрутов среднее время ожидания тоже будет промежуточным, но оно в любом случае заведомо *больше*, чем дает приведенная выше формула. Такой казус заставляет нас вникнуть в задачу несколько глубже.

Для начала рассмотрим вариант, когда нужных нам маршрутов только два и интервал движения у первого маршрута больше, чем у второго, в *целое* число раз: $T_1 = kT_2$, где $k$ – натуральное число. При этом пусть после прибытия на остановку автобуса первого маршрута проходит $x$ минут до появления на ней очередного автобуса второго маршрута (а далее они появляются каждые $T_2$ минут). Ясно, что $0 \le x < T_2$ (ибо если $x \ge T_2$, то появится более ранний автобус второго маршрута, подошедший к остановке после автобуса первого маршрута). Взяв за «базу» больший интервал $T_1$, мы можем изобразить на графике время ожидания $t_{\text{ож}}$ ближайшего подходящего автобуса в зависимости от времени $t$, прошедшего после очередного прибытия автобуса первого маршрута. График имеет характерный «пилообразный» вид с уклоном «зубьев» под углом 45°. На рисунке 1 изображен пример для $k = 4$.

Спрашивается: чему равно в таком случае *среднее* время ожидания? Математическая теория давно дала способ ответа

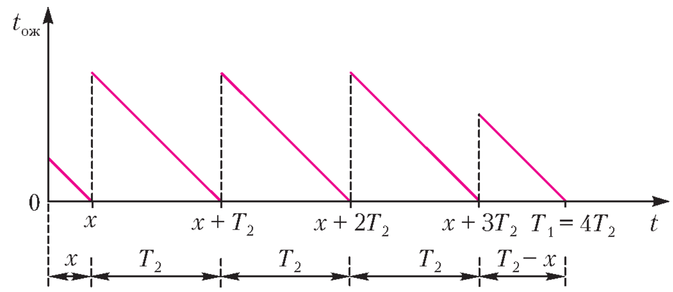



*Рис. 1*

на этот вопрос. Надо всего лишь найти суммарную площадь под графиком на выбранном интервале $T_1$, а затем поделить ее на ширину интервала (т.е. на то же $T_1$).

Площадь $S$ под графиком определяется без труда, потому что график представляет собой совокупность равнобедренных прямоугольных треугольников, длины катетов которых подписаны под графиком. Эти треугольники – следующие:

– один треугольник с катетом $x$;
– $(k - 1)$ треугольников с катетом $T_2$;
– один треугольник с катетом $(T_2 - x)$.

Итого:

$$S = \frac{x^2}{2} + (k-1)\frac{T_2^2}{2} + \frac{(T_2 - x)^2}{2} = \frac{kT_2^2}{2} - T_2 x + x^2.$$

Поэтому среднее время ожидания равно

$$\overline{t_{\text{ож}}} = \frac{S}{T_1} = \frac{S}{kT_2} = \frac{T_2}{2} - \frac{x}{k} + \frac{x^2}{kT_2}.$$

Как видно, величина $\overline{t_{\text{ож}}}$ зависит от $x$ (в чем мы и не сомневались). Значение $x$ нам неизвестно; мы знаем только, что оно принадлежит интервалу $[0; T_2]$. Следовательно, ничего не остается, кроме как усреднить $\overline{t_{\text{ож}}}$ еще и по $x$. Для этого надо построить график зависимости $\overline{t_{\text{ож}}}$ от $x$, вычислить площадь под ним и поделить на этот раз на $T_2$. Однако возникает существенное затруднение: зависимость не является линейной, поэтому определить площадь будет непросто. Конечно, интегральное исчисление позволяет решить такую задачу очень легко.[5] Мы, однако, не станем здесь углубляться в высшую математику, а напрямую используем результа-

[5] Хотя еще Архимед сумел квадрировать параболу (т.е. найти площадь под ней), не используя высшую математику (на эту тему см. статью А.Бендукидзе «Архимед и квадратура параболы» в «Кванте» № 7 за 1971 г.). Но ведь не каждый из нас Архимед!

ты, полученные в этой области нашими славными предшественниками (начиная с И.Ньютона и Г.Лейбница). А эти результаты говорят, что, во-первых, среднее суммы нескольких величин есть сумма их средних, а во-вторых, для любого $a > 0$ среднее значение функции $y = x^a$ на отрезке $[0; x_0]$ равно $\frac{x_0^a}{a+1}$. В данном случае мы, вычисляя $\overline{t_{\text{ож}}}$, имеем место с двумя функциями от $x$: это просто $x$, среднее значение которого на отрезке $[0; T_2]$ равно $\frac{T_2}{2}$ (что и так вполне очевидно), а также $x^2$, среднее значение которого составляет $\frac{T_2^2}{3}$ (а это далеко не очевидно!). Итак, среднее время ожидания, усредненное еще и по $x$ (для убедительности добавим сверху вторую черту), составляет

$$\overline{\overline{t_{\text{ож}}}} = \frac{T_2}{2} - \frac{T_2}{2k} + \frac{T_2^2}{3kT_2} = \frac{T_2}{2} - \frac{T_2}{6k} = \frac{T_2}{2} - \frac{T_2^2}{6T_1} = \frac{T_2(3T_1 - T_2)}{6T_1}.$$

Формула вышла довольно компактная и несложная для запоминания. Применив ее для рассмотренного выше случая с двумя маршрутами, интервалы для которых составляют по 10 минут, получаем, что среднее время ожидания равно $\frac{10 \cdot (3 \cdot 10 - 10)}{6 \cdot 10} = 3\frac{1}{3}$ минуты = 3 минуты 20 секунд, что существенно превышает найденные нами ранее 2 минуты 30 секунд.

В принципе, ненамного сложнее задача с определением среднего времени ожидания для двух маршрутов, если интервал движения одного из них не делится нацело на интервал движения второго (разве что громоздкость промежуточных формул изрядно возрастает). А результат... оказывается тем же! Поэтому мы можем применить найденную нами формулу для другого ранее рассмотренного случая с двумя маршрутами, интервалы движения которых составляют 10 и 15 минут, и здесь получается

$$\overline{t_{\text{ож}}} = \frac{10 \cdot (3 \cdot 15 - 10)}{6 \cdot 15} = 3\frac{8}{9} \text{ минуты} \approx 3 \text{ минуты } 53 \text{ секунды}.$$

Расхождение с первоначальным ответом (3 минуты) весьма велико!

Ну, а если подходящих маршрутов больше двух, то вычислительные трудности катастрофически возрастают. Видимо, нужен какой-то принципиально иной подход. Либо можно-таки использовать те самые «электрические» формулы, но иметь в виду, что они дают *оценку снизу*. Оценкой же сверху можно считать половину наименьшего из интервалов. А потом взять, допустим, их среднее арифметическое. Какая-никакая, а оценка!

Любопытен также вариант, который пусть не слишком часто, но все-таки встречается: если для некоторых маршрутов указан, как и прежде, интервал движения, а для других – «прямое» расписание (т.е. перечислено время прибытия всех автобусов данного маршрута). Оказывается, наличие расписания далеко не всегда упрощает задачу.

Для примера рассмотрим случай, когда интервал движения указан только для одного подходящего нам маршрута, для определенности – первого, и пусть он равен $T_1$, для остальных же удовлетворяющих нас маршрутов имеется «жесткое» расписание. Посмотрим на него и определим, сколько времени нам предстоит ожидать *ближайшего* из этих «расписанных» маршрутов, пусть его номер – второй, и это время равно $T_2$. Теперь заметим, что если $T_1 < T_2$, то в любом случае мы уедем на автобусе первого маршрута, не дождавшись второго! Поэтому здесь ситуация аналогична единственному имеющемуся маршруту с интервалом $T_1$, и среднее время ожидания, как мы определили выше, равно $t_{\text{ож}} = \frac{T_1}{2}$. Понятно, что при $T_1 = T_2$ результат аналогичен (хотя и появляется исчезающе малый шанс уехать на автобусе второго маршрута, если он подъедет к остановке вместе с первым).

Иное дело – если $T_1 > T_2$. Здесь все зависит от того, когда на остановку прибудет автобус первого маршрута. Пусть это произойдет через промежуток времени $t$, где $t$ – время, которое может равновероятно принимать любое значение от 0 до $T_1$. Заметим, что если $t < T_2$, то нам придется ждать ровно $t$ минут, и мы уедем на автобусе первого маршрута, если же $t > T_2$, то мы отправимся в путь через $T_2$ минут на автобусе второго маршрута (при $t = T_2$ в этот момент времени прикатят сразу два автобуса). Графическая зависимость времени ожидания $t_{\text{ож}}$ от $t$ приведена на рисунке 2.[6]

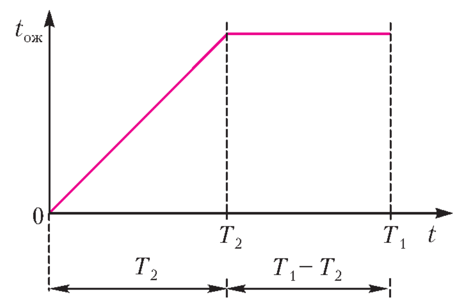



*Рис. 2*

И здесь не составляет труда найти площадь под графиком, которая равна $S = \frac{T_2(2T_1 - T_2)}{2}$, и потому среднее время ожидания составит $\overline{t_{\text{ож}}} = \frac{S}{T_1} = \frac{T_2(2T_1 - T_2)}{2T_1}$. Например, если интервал движения одного автобуса равен 20 минутам, а второй, согласно расписанию, прибудет ровно через 10 минут, то $T_1 = 20$, $T_2 = 10$, и потому

$$\overline{t_{\text{ож}}} = \frac{10 \cdot (2 \cdot 20 - 10)}{2 \cdot 20} = 7\frac{1}{2} \text{ минуты} = 7 \text{ минут } 30 \text{ секунд}.$$

Если же автобусов с указанным интервалом движения не меньше двух, то расчетные трудности стремительно возрастают, и как их одолеть – автору неизвестно. Впрочем, никто не запрещает читателю попробовать в этом разобраться самостоятельно.

Что ж, теперь мы знаем, чем следует заняться во время вынужденного безделья на остановке общественного транспорта – оценкой времени ожидания. И весьма вероятно, что пока мы будем это делать, из-за поворота появится нужное нам транспортное средство. Так что в любом случае время не будет потеряно зря. А заодно и попрактикуемся в устном счете, что, согласитесь, уж точно не повредит.

---

[6] Кое-кто может быть удивлен: почему это на рисунке 2 косой отрезок наклонен не так, как отрезки на рисунке 1, а в другую сторону? Дело в том, что сама переменная $t$, значение которой откладывается по горизонтальной оси, имеет в обоих случаях несколько различный смысл. Для рисунка 1 это время, прошедшее с момента отъезда от остановки очередного автобуса первого маршрута до нашего прибытия на остановку. А для рисунка 2 это время, прошедшее от нашего прибытия на остановку до появления на ней очередного автобуса первого маршрута – т.е. понятие как бы «с обратным знаком»; отсюда и «обратный» уклон.

# Вот что-то с горочки спустилось...

А.ЧЕРНОУЦАН

В ЭТОЙ СТАТЬЕ СОБРАНЫ ЗАДАЧИ, ОБЪЕДИНЕННЫЕ ПРИсутствием в их условии наклонной плоскости. Задачи с наклонной плоскостью встречаются не только во всех разделах механики, но и во многих других областях физики. Спускаясь вниз по склону и забираясь обратно, мы встретим много разнообразных физических сюжетов – как простых, базовых, так и достаточно нетривиальных.

Итак – вперед и вверх!

### Кинематика

Если свободно летящее тело «приземляется» не на горизонтальную, а на наклонную плоскость, то необходимо уметь правильно записывать «условие падения».

**Задача 1.** *На горе с углом наклона к горизонту* $\alpha = 30°$ *горизонтально бросают мяч с начальной скоростью* $v_0 = 15$ *м/с. На каком расстоянии от точки бросания вдоль наклонной плоскости упадет мяч?*

**Решение.** Выберем оси $x$ и $y$ стандартным для горизонтального броска образом – горизонтально и вертикально вниз (рис.1). Тогда зависимость координат мяча от времени имеет вид

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{gt^2}{2}.$$

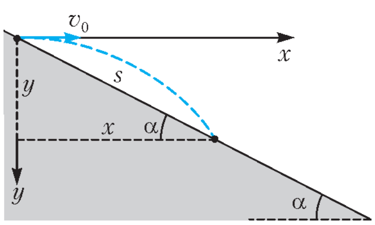


Рис. 1

Однако условие падения, т.е. условие пересечения траектории мяча с наклонной плоскостью, выглядит так:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Отсюда находим время полета и искомое расстояние:

$$t = \frac{2v_0 \operatorname{tg}\alpha}{g}, \quad s = \frac{x}{\cos\alpha} = \frac{v_0 t}{\cos\alpha} = \frac{2v_0^2 \operatorname{tg}\alpha}{g\cos\alpha} = 30 \text{ м}.$$

В некоторых случаях оказывается полезным использовать нестандартные для кинематики наклонные оси – вдоль наклонной плоскости и перпендикулярно к ней.

**Задача 2** (ЕГЭ). *Маленький шарик падает сверху на наклонную плоскость и упруго отражается от нее. Угол наклона плоскости к горизонту* $\alpha = 30°$. *На какое расстояние по горизонтали перемещается шарик между первым и вторым ударами о плоскость? Скорость шарика в момент первого удара направлена вертикально вниз и равна* $v_0 = 1$ *м/с.*

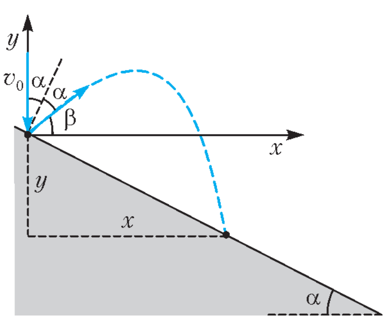


Рис. 2

**Решение.** Эту задачу можно решать, как предыдущую. После удара шарик отскакивает под углом $\beta = \pi/2 - 2\alpha$ (рис.2), его координаты меняются со временем по закону

$$x = (v_0\cos\beta)t, \quad y = (v_0\sin\beta)t - \frac{gt^2}{2}.$$

При записи условия падения надо учесть, что оно происходит ниже начальной точки, а ось $y$ направлена вверх:

$$\frac{y}{x} = -\operatorname{tg}\alpha.$$

После тщательных преобразований (с учетом связи между углами $\beta$ и $\alpha$ и воспользовавшись формулой для синуса суммы углов) получим

$$t = \frac{2v_0}{g}.$$

Согласитесь, неожиданно просто выглядит выражение для времени между первым и вторым ударами! Ответ, соответственно, тоже простой:

$$x = \frac{2v_0^2\cos\beta}{g} = 17{,}3 \text{ см}.$$

Понять ответ для времени, а также увидеть другие особенности движения шарика позволяет выбор наклонных осей координат, непривычный для кинематики, но совершенно стандартный для динамики (рис.3).

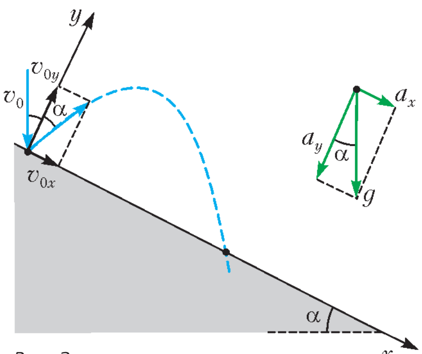


Рис. 3

На первый взгляд, описание движения усложняется: теперь движение происходит с ускорением $a_y = -g\cos\alpha$ по оси $y$ и с ускорением $a_x = g\sin\alpha$ по оси $x$. Зато, во-первых, резко упрощается условие падения: $y = 0$ и, во-вторых, скорость $v_x$ при любом отскоке не меняется. Следовательно, по оси $y$ происходят одинаковые циклы подъема и падения, при которых шарик удаляется от плоскости на одинаковые расстояния и которые занимают одинаковое время

$$t = \frac{2v_{0y}}{|a_y|} = \frac{2v_0\cos\alpha}{g\cos\alpha} = \frac{2v_0}{g},$$

а координата $x$ меняется непрерывно по закону

$$x = (v_0\sin\alpha)t + \frac{(g\sin\alpha)t^2}{2},$$

не чувствуя ударов. Искомое расстояние по горизонтали теперь равно $x\cos\alpha$.

### Динамика

Начнем с переходной ситуации, которую можно назвать «почти кинематика».

**Задача 3** (ЕГЭ). *Наклонная плоскость пересекается с горизонтальной плоскостью по прямой AB. Угол между плоскостями* $\alpha = 30°$. *Маленькая шайба начинает движение вверх по наклонной плоскости из точки A с начальной скоростью* $v_0 = 2$ *м/с под углом* $\beta = 60°$ *к прямой AB*

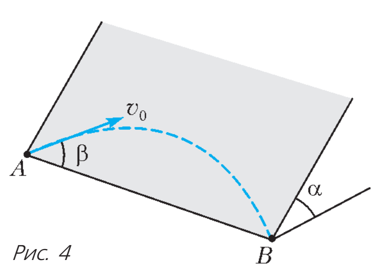


Рис. 4

*(рис.4). В ходе движения шайба съезжает на прямую AB в точке B. Пренебрегая трением между шайбой и наклонной плоскостью, найдите расстояние AB.*

**Решение.** На шайбу в процессе движения действуют две силы – тяжести и нормальной реакции. Проецируя второй закон Ньютона на оси $x$ и $y$, выбранные в плоскости движения (по линии $AB$ вверх и перпендикулярно к ней), получим

$$a_x = 0\,,\quad a_y = -g\sin\alpha\,.$$

Видно, что движение шайбы в этой плоскости эквивалентно движению тела, брошенного под углом $\beta$ к горизонту в поле тяжести с ускорением свободного падения $g' = g\sin\alpha$. Воспользуемся без вывода известной формулой для дальности полета вдоль оси $x$ и найдем

$$AB = l = \frac{v_0^2\sin 2\beta}{g'} = \frac{v_0^2\sin 2\beta}{g\sin\alpha} = 69\ \text{см}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению простой базовой задачи: тело положили на шероховатую наклонную плоскость. Что с ним будет?

**Задача 4.** *С вершины наклонной плоскости высотой $h$ = 5 м и углом наклона к горизонту $\alpha = 45°$ начинает соскальзывать тело. Коэффициент трения тела о плоскость $\mu$ = 0,19. Определите скорость тела в конце спуска.*

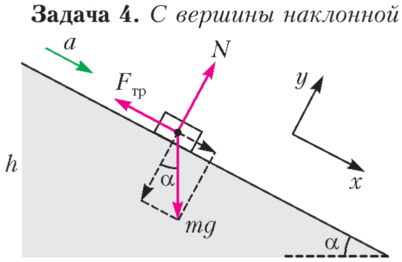



Рис. 5

**Решение.** Предположим, что тело действительно соскальзывает вниз (рис.5). В этом случае на тело действует еще сила трения скольжения. Второй закон Ньютона

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{тр} = m\vec{a}$$

в проекциях на оси $x$ и $y$ вместе с формулой для силы трения скольжения образуют систему уравнений

$$mg\sin\alpha - F_{тр} = ma_x,$$

$$N - mg\cos\alpha = 0,$$

$$F_{тр} = \mu N,$$

решение которой имеет вид

$$N = mg\cos\alpha,\quad F_{тр} = \mu mg\cos\alpha,\quad a_x = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

При начальном условии $v_0 = 0$ (тело отпускают без начальной скорости) ответ для ускорения имеет физический смысл только в случае $a_x \geq 0$. Если же ответ для ускорения получится отрицательным (т.е. бессмысленным), то предположение о том, что тело движется, оказывается неверным. При $\mu > \operatorname{tg}\alpha$ тело останется в покое и на него будет действовать сила трения покоя, которую находим из второго закона Ньютона: $F_{тр} = mg\sin\alpha$, при этом $F_{тр} < \mu N$.

При численных данных из условия ускорение получается положительным, и нам остается найти конечную скорость тела из кинематического соотношения

$$v^2 = 2a_x\frac{h}{\sin\alpha}\,.$$

Получаем

$$v = \sqrt{2gh(1 - \mu\operatorname{ctg}\alpha)} = 9\ \text{м/с}.$$

*Замечание 1.* Эту задачу можно решать с помощью закона сохранения энергии, не находя ускорения, а сразу определив конечную скорость. Так как в системе есть трение, то часть механической энергии перейдет во внутреннюю, причем увеличение внутренней энергии равно работе силы трения:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + F_{тр}\frac{h}{\sin\alpha}\,,$$

где $F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$. Если $\mu > \operatorname{tg}\alpha$, то ответ для $v^2$ получится отрицательным. Задачи на законы сохранения будут рассмотрены ниже.

*Замечание 2.* Отрицательный ответ для ускорения является бессмысленным только при начальной скорости, равной нулю. Если телу, лежащему на наклонной плоскости ($\mu > \operatorname{tg}\alpha$), резким ударом сообщить начальную скорость, направленную вниз, то оно будет тормозиться, о чем и свидетельствует отрицательный знак ускорения.

*Замечание 3.* Если телу сообщить начальную скорость, направленную вверх вдоль плоскости, то сила трения скольжения и проекция силы тяжести будут направлены против скорости, и ответ для ускорения при любом $\mu$ примет вид

$$a_x = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\,.$$

Хотя ускорения при движении тела вверх и вниз вдоль наклонной плоскости различны, но сила трения в обоих случаях одна и та же: $F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$. Такой же она остается, если на тело действует внешняя сила, направленная вдоль наклонной плоскости. Как мы увидим, это удобно при использовании закона сохранения энергии. Однако слишком привыкать к этому не следует, в некоторых случаях сила трения имеет иное значение.

**Задача 5.** *Тело поднимают вверх вдоль наклонной плоскости, прикладывая к нему горизонтальную силу, величина которой вдвое больше действующей на тело силы тяжести. Высота наклонной плоскости $h = 3$ м, ее длина $l = 5$ м. Найдите ускорение тела, если коэффициент трения $\mu$ = 0,2.*

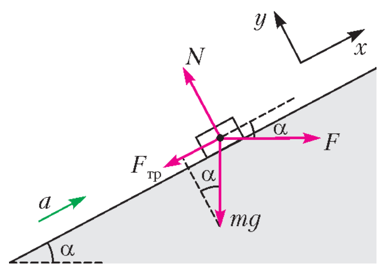



Рис. 6

**Решение.** В этом случае внешняя сила, равная $F = 2mg$, тоже имеет проекции на обе оси (рис.6):

$$F\cos\alpha - mg\sin\alpha - F_{тр} = ma_x,$$

$$N - mg\cos\alpha - F\sin\alpha = 0,$$

$$F_{тр} = \mu N.$$

Решая эту систему, находим

$$a_x = g(2\cos\alpha - \sin\alpha - \mu\cos\alpha - 2\mu\sin\alpha) = 6\ \text{м/с}^2\,.$$

Если бы величина $a_x$ получилась отрицательной, то это не обязательно означало бы, что тело покоится. Еще одна возможность – тело съезжает вниз, несмотря на действие внешней силы. Лучше всего решить задачу еще раз, направив ось $x$ вниз, а силу трения вверх, и если ответ опять получится отрицательным, то можно будет однозначно утверждать, что тело покоится!

До сих пор мы рассматривали задачи, где движение тела по шероховатой наклонной плоскости происходит по линии ее ската. Рассмотрим теперь ситуацию, когда силы и скорости не лежат в плоскости ската.

**Задача 6.** *Телу толчком сообщили скорость, направленную горизонтально вдоль наклонной плоскости (рис.7).*

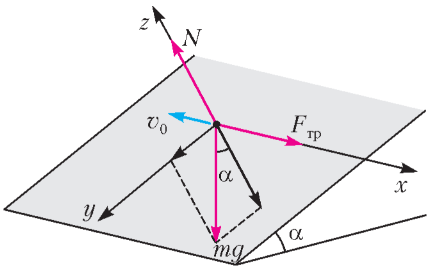



Рис. 7

*Найдите величину ускорения тела в начальный момент, если* $\sin\alpha = 0{,}2$, *а* $\mu = \sqrt{3}/3$.

**Решение.** Движение тела происходит вдоль плоскости, где на него действуют сила трения, направленная вдоль оси $x$, и составляющая силы тяжести, направленная вдоль оси $y$. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на три оси и формулу для силы трения скольжения:

$$F_{тр} = ma_x,$$

$$mg\sin\alpha = ma_y,$$

$$N - mg\cos\alpha = 0,$$

$$F_{тр} = \mu N.$$

Выразив отсюда $a_x$ и $a_y$, найдем величину ускорения:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = g\sqrt{\mu^2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 6 \text{ м/с}^2 .$$

Следующую задачу, внешне связанную с предыдущей, можно отнести к олимпиадным.

**Задача 7.** *На бесконечной наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол* $\alpha$, *покоится шайба. Коэффициент трения шайбы о плоскость* $\mu = \operatorname{tg}\alpha$. *Шайбе сообщают начальную скорость* $v_0$, *направленную горизонтально вдоль плоскости. Найдите установившуюся скорость соскальзывания шайбы.*

**Решение.** В случае $\mu = \operatorname{tg}\alpha$ сила трения $F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot mg\cos\alpha = mg\sin\alpha$ равна проекции силы тяжести на ось $x$, направленную вниз вдоль линии ската. Из этого, в частности, следует, что через достаточно большое время шайба будет двигаться вниз вдоль линии ската с постоянной скоростью $v_{уст}$, о которой как раз и говорится в условии задачи. Сила трения в каждый момент времени направлена против скорости шайбы, а проекция силы тяжести – вниз вдоль линии ската. Если в какой-то момент скорость направлена под углом $\beta$ к линии ската, то проекция второго закона Ньютона на направление скорости имеет вид (рис.8)

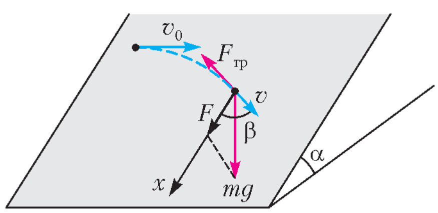



Рис. 8

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = -F + F\cos\beta ,$$

где обозначено $F = mg\sin\alpha = F_{тр}$ и учтено, что проекция ускорения на направление скорости равна быстроте изменения модуля скорости. Аналогично, проекция второго закона Ньютона на ось $x$ выглядит так:

$$m\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = F - F\cos\beta .$$

Складывая уравнения почленно, находим

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} + \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = 0 \text{, т.е. } v + v_x = \text{const} .$$

В начальный момент $v = v_0$, $v_x = 0$, при установившемся движении $v = v_x = v_{уст}$. Получаем

$$v_0 + 0 = 2v_{уст}\text{, откуда } v_{уст} = \frac{v_0}{2}.$$

В следующей задаче по наклонной плоскости движется не одно, а два взаимодействующих тела.

**Задача 8.** *Два бруска массами* $m_1 = 4$ *кг и* $m_2 = 6$ *кг, связанные нитью, соскальзывают с наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол* $\alpha = 60°$ *(рис.9). Коэффициент трения между нижним бруском и плоскостью* $\mu_1 = 0{,}15$, *а между верхним бруском и плоскостью* $\mu_2 = 0{,}4$. *Найдите силу натяжения нити.*

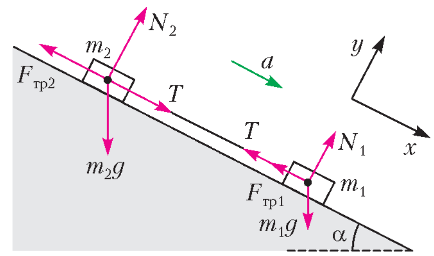



Рис. 9

**Решение.** Запишем второй закон Ньютона для каждого тела в проекции на ось $x$ (проектирование на ось $y$ для краткости опускаем):

$$m_1g\sin\alpha - T - F_{тр1} = m_1a,$$

$$m_2g\sin\alpha + T - F_{тр2} = m_2a.$$

Подставляя в уравнения $F_{тр1} = \mu_1N_1 = \mu_1m_1g\cos\alpha$, $F_{тр2} = \mu_2N_2 = \mu_2m_2g\cos\alpha$ и исключая из этой системы ускорение $a$, получим

$$T = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}g(\mu_2 - \mu_1)\cos\alpha = 3 \text{ Н}.$$

Обратите внимание – исключив ускорение, мы можем не увидеть, что система тел остается из-за трения неподвижной! Чтобы выяснить, при каком условии тела движутся, надо найти ускорение и записать условие его положительности. Получим

$$\operatorname{tg}\alpha > \frac{\mu_1m_1 + \mu_2m_2}{m_1 + m_2}.$$

Причем не обязательно требовать, чтобы оба коэффициента трения были меньше $\operatorname{tg}\alpha$. Например, если $m_2 \ll m_1$, то $\mu_2$ может быть больше $\operatorname{tg}\alpha$ (первое тело потянет за собой второе).

Если тело на наклонной плоскости движется по окружности, то ускорение направлено не вдоль плоскости, а к центру окружности.

**Задача 9.** *Полый конус с углом при вершине* $2\alpha$ *вращается вокруг вертикальной оси, совпадающей с его осью симметрии. Вершина конуса обращена вниз. На внутренней поверхности конуса на расстоянии L от вершины находится небольшая шайба, коэффициент трения которой о поверхность конуса равен* $\mu$. *При каких значениях угловой скорости вращения конуса шайба будет неподвижна относительно конуса?*

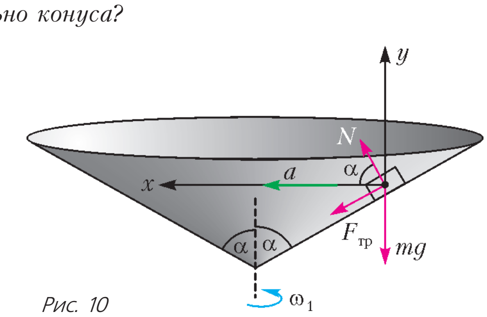



Рис. 10

**Решение.** На угловую скорость есть два ограничения. При максимальном значении скорости $\omega_1$ шайба начинает проскальзывать и двигаться наружу, максимальная сила трения покоя при этом направлена вниз вдоль плоскости (рис.10). При минимальном значении скорости $\omega_2$ шайба начинает соскальзывать вниз, а сила трения направлена вверх вдоль плоскости. Поскольку ускорение шайбы перпендикулярно к оси вращения, направим ось $x$ по ускорению, а ось $y$ – вертикально вверх. В первом случае (см. рис.10) второй закон Ньютона в проекции на эти оси имеет вид

$$N\cos\alpha + F_{\text{тр}}\sin\alpha = m\omega_1^2 L\sin\alpha,$$

$$N\sin\alpha - F_{\text{тр}}\cos\alpha - mg = 0.$$

Подставляя условие начала проскальзывания $F_{\text{тр}} = \mu N$ и исключая $N$, получаем

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L\sin\alpha}\,\frac{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}}.$$

Такая угловая скорость достижима только при условии $\mu < \operatorname{tg}\alpha$. Аналогичные расчеты для $\omega_2$ дают

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L\sin\alpha}\,\frac{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}}.$$

Минимальная угловая скорость существует при условии $\mu < \operatorname{ctg}\alpha$. Именно при этом условии шайба соскальзывает вниз с покоящейся наклонной плоскости. Приведем также значение промежуточной угловой скорости, при которой сила трения обращается в ноль:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L\sin\alpha}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}.$$

### Закон сохранения энергии

Начнем опять с переходной «почти динамической» задачи.

**Задача 10.** *Уклон участка шоссе равен $h = 1$ м на каждые $s = 20$ м пути. Спускаясь под уклон при выключенном двигателе, автомобиль движется равномерно со скоростью $v = 60$ км/ч. Какую полезную мощность должен развивать двигатель этого автомобиля, чтобы он поднимался по тому же уклону с той же скоростью? Масса автомобиля $m = 1500$ кг.*

**Решение.** Первая фраза в условии позволяет нам определить угол наклона: $\sin\alpha = h/s = 1/20$. При спуске проекция силы тяжести компенсируется силой сопротивления со стороны дороги и воздуха:

$$mg\sin\alpha - F_{\text{с}} = 0.$$

Поскольку сила сопротивления, действующая на данный автомобиль, зависит от его скорости и покрытия дороги, то при подъеме она будет такой же. Из второго закона Ньютона в проекции вдоль наклонной плоскости:

$$F_{\text{т}} - F_{\text{с}} - mg\sin\alpha = 0$$

найдем силу тяги $F_{\text{т}}$ и полезную мощность $P$:

$$P = F_{\text{т}}v = (2mg\sin\alpha)v = 25 \text{ кВт}.$$

Следующие две задачи можно решать с помощью уравнений кинематики и динамики, но энергетический подход существенно сокращает решение.

**Задача 11.** *На наклонной плоскости, синус угла наклона которой к горизонту равен 0,28, на высоте $h = 2{,}1$ м лежит небольшая шайба. Коэффициент трения шайбы о плоскость $\mu = 0{,}5$. Какую скорость надо сообщить шайбе вниз вдоль наклонной плоскости, чтобы после абсолютно упругого удара об упор, находящийся у основания плоскости, шайба вернулась в исходную точку?*

**Решение.** При записи закона сохранения энергии надо учесть, что при ударе энергия не теряется, а часть механической энергии, перешедшая при движении с трением во внутреннюю, равна модулю работы силы трения:

$$mgh + \frac{mv_0^2}{2} = mgh + \mu mg\cos\alpha\left(2\frac{h}{\sin\alpha}\right).$$

Мы учли, что сила трения на всем пути – вниз и вверх – равна $\mu mg\cos\alpha$. Получаем

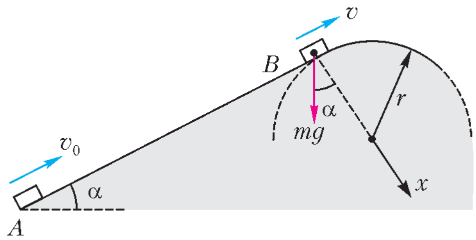



*Рис. 11*

$$v_0 = \sqrt{4\mu gh\operatorname{ctg}\alpha} = 12 \text{ м/с}.$$

**Задача 12** (ЕГЭ). *Небольшая шайба после удара скользит вверх по наклонной плоскости из точки A (рис.11). В точке B наклонная плоскость без излома переходит в наружную поверхность горизонтальной трубы радиусом r. Если в точке A скорость шайбы превосходит $v_0 = 4$ м/с, то в точке B шайба отрывается от опоры. Длина наклонной плоскости $AB = L = 1$ м, угол $\alpha = 30°$. Коэффициент трения между наклонной плоскостью и шайбой $\mu = 0{,}2$. Найдите внешний радиус трубы.*

**Решение.** При переходе на поверхность трубы сила реакции $\vec{N}$ должна обратиться в ноль, но при этом радиус кривизны траектории должен быть равен радиусу трубы $r$ (при меньшей скорости шайба скользит по трубе). Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось $x$, направленную к центру окружности:

$$mg\cos\alpha = \frac{mv^2}{r}.$$

Скорость $v$ свяжем с $v_0$ с помощью закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgL\sin\alpha + (\mu mg\cos\alpha)L,$$

где последний член равен механической энергии, перешедшей во внутреннюю (в тепло) за счет работы силы трения. Получаем

$$r = \frac{v_0^2}{g\cos\alpha} - 2L\operatorname{tg}\alpha - 2\mu L = 0{,}3 \text{ м}.$$

### Магнетизм

Умение правильно работать с наклонной плоскостью помогает справляться с разнообразными задачами на соскальзывание перемычек по наклонным рельсам.

**Задача 13.** *По П-образной рамке, наклоненной к горизонту под углом, синус которого равен 0,8, и помещенной в однородное вертикальное магнитное поле, соскальзывает перемычка массой $m = 20$ г. Длина перемычки $l = 10$ см, ее сопротивление $R = 1{,}2$ мОм, индукция поля $B = 0{,}1$ Тл, коэффициент трения между перемычкой и рамкой $\mu = 0{,}5$. Найдите установившуюся скорость движения перемычки. Сопротивлением рамки пренебречь.*

**Решение.** При движении перемычки со скоростью $v$ (рис.12) в ней возникает ЭДС индукции, равная

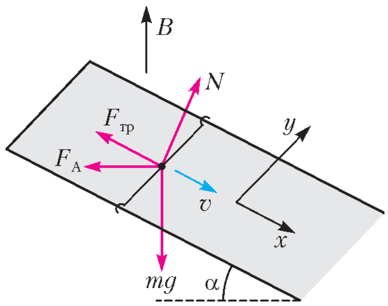



Рис. 12

$$\mathscr{E} = Bvl\sin(90^\circ + \alpha) = Bvl\cos\alpha .$$

Вследствие этого в контуре протекает ток

$$I = \frac{Bvl\cos\alpha}{R},$$

и на перемычку действует сила Ампера со стороны вертикального магнитного поля, равная

$$F_A = IBl = \frac{B^2l^2v\cos\alpha}{R}$$

и направленная горизонтально против движения (в соответствии с правилом Ленца). Второй закон Ньютона для установившегося движения перемычки в проекциях на оси $x$ и $y$ имеет вид

$$mg\sin\alpha - F_A\cos\alpha - F_{тр} = 0,$$

$$N - mg\cos\alpha - F_A\sin\alpha = 0,$$

$$F_{тр} = \mu N.$$

Решив полученную систему, найдем

$$v = \frac{mgR}{B^2l^2\cos\alpha}\,\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = 2 \text{ м/с}.$$

### Колебания

Следующая задача, хотя в ней нет периодически повторяющихся процессов, решается методами теории гармонических колебаний.

**Задача 14.** *Цепочка длиной $l$ = 45 см, скользившая по горизонтальной плоскости со скоростью $v_0$ = 1 м/с, начинает въезжать на наклонную плоскость перпендикулярно ее нижней границе. Через какое время цепочка остановится? Угол наклона плоскости $\alpha = 30^\circ$. Трением пренебречь.*

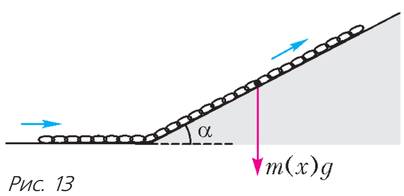



Рис. 13

**Решение.** Рассмотрим момент, когда часть цепочки длиной $x$ и массой $m(x) = mx/l$ заехала на наклонную плоскость (рис.13). Если записать для каждого элемента цепочки второй закон Ньютона в проекции на направление его движения, а затем просуммировать эти уравнения, то получим уравнение движения цепочки (внутренние силы взаимодействия между элементами цепочки сокращаются)

$$mx'' = -m(x)g\sin\alpha ,$$

которое приводится к уравнению гармонических колебаний

$$x'' + \frac{g\sin\alpha}{l}x = 0 .$$

Движение цепочки происходит по закону гармонических колебаний, с начальным условием $x = 0$,

$$x = A\sin\omega t ,$$

где $\omega = \sqrt{(g\sin\alpha)/l}$. Скорость цепочки при этом изменяется по закону

$$v = \omega A\cos\omega t = v_0\cos\omega t ,\ \text{откуда}\ A = \frac{v_0}{\omega}.$$

В зависимости от начальных условий возможны два случая. Если $A < l$, т.е. $v_0 < \omega l$, то движение цепочки до остановки происходит по гармоническому закону и совпадает с движением маятника от центра колебаний до крайней точки. Именно такой случай реализуется в данной задаче. Время до остановки равно четверти периода колебаний:

$$t = \frac{T}{4} = \frac{2\pi/\omega}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g\sin\alpha}} = 0{,}47 \text{ с}.$$

Если же $A > l$, т.е. $v_0 > \omega l$, то цепочка целиком заедет на наклонную плоскость раньше, чем остановится. Время $t_1$ движения до этого момента надо определить из уравнения $l = A\sin\omega t_1$, найти скорость цепочки в этот момент и затем вычислить время $t_2$ движения до остановки.

### Упражнения

**1.** Из некоторой точки на склоне горы бросают вверх по склону тело с начальной скоростью $v_0$ = 21 м/с под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. На каком расстоянии от точки броска упадет тело, если угол наклона горы $\beta = 30^\circ$?

**2.** Маленький брусок находится на вершине наклонной плоскости длиной $l = 26$ м и высотой $h = 10$ м. Коэффициент трения между бруском и плоскостью $\mu = 0{,}45$. Какую минимальную скорость надо сообщить бруску, чтобы он достиг основания плоскости?

**3.** Клин массой $m_1$ с углом наклона $\alpha$ находится на гладкой горизонтальной поверхности. С вершины клина высоты $h$ начинает соскальзывать маленький брусок массой $m_2$. Пренебрегая трением, найдите ускорение клина и время движения бруска до нижней точки клина.

**4.** На наклонной плоскости высотой $h = 3$ м и длиной $l = 9$ м лежит тело массой $m = 6$ кг. Какую минимальную горизонтальную силу, направленную вдоль плоскости, надо приложить к телу, чтобы сдвинуть его с места? Коэффициент трения $\mu = 0{,}5$.

**5.** Два бруска, связанные нитью, поднимают вверх вдоль наклонной плоскости, прикладывая к верхнему бруску массой $m_1$ = 2 кг силу $F = 30$ Н, параллельную плоскости. Коэффициенты трения между брусками и плоскостью одинаковы. Найдите силу натяжения нити, если масса нижнего бруска $m_2$ = 4 кг.

**6.** Мотоциклист производит поворот на наклонном треке. Во сколько раз максимально допустимая скорость движения больше минимальной, если коэффициент трения $\mu$ = 0,75, а угол наклона трека к горизонту $\alpha = 45^\circ$? Поворот надо пройти без проскальзывания колес по треку.

**7.** Стержень массой $m$ = 20 г и длиной $l$ = 5 см положили горизонтально на гладкую наклонную плоскость, составляющую с горизонтом угол, тангенс которого равен 0,3. Вся система находится в вертикальном магнитном поле с индукцией $B$ = = 150 мТл. При какой силе тока в стержне он будет находиться в равновесии?

**8.** Горизонтальный проводящий стержень прямоугольного сечения поступательно движется с ускорением вверх по гладкой наклонной плоскости в вертикальном однородном магнитном поле. По стержню протекает ток $I$. Угол наклона плоскости $\alpha = 30^\circ$. Отношение массы стержня к его длине $m/L$ = = 0,1 кг/м. Модуль индукции магнитного поля $B$ = 0,2 Тл. Ускорение стержня $a = 1{,}9$ м/с$^2$. Чему равна сила тока в стержне?

**9.** По П-образной рамке, наклоненной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту и помещенной в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости рамки, начинает соскальзывать без трения перемычка массой $m = 30$ г. Длина перемычки $l = 10$ см, ее сопротивление $R = 2$ мОм, индукция поля $B$ = 0,1 Тл. Найдите установившуюся скорость движения перемычки. Сопротивлением рамки пренебречь.

**10.** Тонкую цепочку длиной $l = 45$ см удерживают за верхний конец на гладкой наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом. Через какое время после освобождения цепочки она наполовину покинет наклонную плоскость, если вначале ее нижний конец находился у края наклонной плоскости?

# XXI Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» в рамках международной программы «Дети. Интеллект. Творчество» при участии МГУ имени М.В.Ломоносова, Института педагогических исследований одаренности РАО (г. Новосибирск) и при поддержке Фонда некоммерческих программ «Династия», компаний «Кирилл и Мефодий», «КМ–Образование», «Физикон», «1С», Издательского Дома «Первое сентября» и журналов «Квант», «Потенциал», «Физика в школе» и «Физика для школьников» провел XXI Международную тест-рейтинговую олимпиаду «Интеллектуальный марафон».

Олимпиада проходила с 7 по 14 октября 2012 года на полуострове Халкидики (Греция). На олимпиаду приехали участники из разных регионов России и Казахстана, а также две команды из Норвегии. Одаренные школьники, проявившие интерес к фундаментальным наукам, соревновались в командных и индивидуальных турах по математике, физике, истории научных идей и открытий. В десятый раз участвовали в олимпиаде школьники, интересующиеся экологией и биологией, соревнуясь в командном туре по истории научных идей и открытий и в индивидуальных турах по биологии и экологии. Педагоги и психологи собрались на свою научную сессию в четвертый раз. В рамках олимпиады состоялся I Международный математический турнир имени М.В.Ломоносова для учащихся 5–8 классов (олимпийский резерв).

Абсолютным победителем олимпиады «Интеллектуальный марафон-2012» по фундаментальным наукам в командном зачете стала команда лицея 2 из города Альметьевска (Россия). Ей был вручен главный приз соревнований – Суперкубок. Команда выступила очень ровно, она была призером в турах по математике, истории научных идей и открытий и физике. Второе место в общем зачете заняла команда лицея 4 из города Таганрога (Россия). Она также заняла первые место по математике и физике. Команде был вручен большой кубок за второе место в общем зачете и соответствующие дипломы за успехи в командных соревнованиях. На третье место вышла команда лицея «Классический» из города Ростов-на-Дону (Россия). Она также заняла первое место по истории научных идей и открытий. Ей был вручен кубок и диплом.

В индивидуальных соревнованиях абсолютным победителем олимпиады стала Анна Шалова, ученица лицея 4 из Таганрога. Ей были вручены большая золотая медаль, малая золотая медаль за первое место по физике и малая бронзовая медаль за третье место по математике. Вторым призером в общем зачете стала Анастасия Корниевская (лицей «Классический», Ростов-на-Дону), завоевавшая также малую серебряную медаль за второе место по математике. Большую бронзовую медаль в общем зачете завоевал Дмитрий Кизель (лицей 4, Таганрог). Александр Стафеевский (лицей 4, Таганрог) получил малую серебряную медаль за второе место по физике, Булат Ибрагимов (лицей 2, Альметьевск) был награжден за третье место по физике малой бронзовой медалью.

Все победители и призеры получили разные подарки и призы от организаторов и спонсоров олимпиады.

Международный интеллект-клуб «Глюон» приглашает региональные центры, школы, лицеи и гимназии, работающие с одаренными детьми, принять участие в XXII Международной олимпиаде «Интеллектуальный марафон», которая пройдет в октябре 2013 года в Испании.

Заявки на участие присылайте по адресу: 115522 Россия, Москва, Пролетарский проспект, д.15/6, корп.2, МИК «Глюон»

Телефон: (495)517-8014, факс: (495)396-8227
E-mail: gluon@yandex.ru
Сайт: www.gluon.ru

## ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ ПО ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ НАУКАМ

*Письменный индивидуальный тур*

### Математика

**1.** Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 29, имеющее сумму цифр, равную 29, и оканчивающееся на 29.

**2.** На стороне $AC$ треугольника $ABC$ взята точка $D$ такая, что $BD = BC$, причем $DC = 2AD$. Пусть $E$ – точка касания окружности, вписанной в треугольник $BDC$, с отрезком $BD$. Найдите величину угла $AED$, если $\angle C = 40°$.

**3.** В левый нижний угол шахматной доски $8 \times 8$ поставлены в форме квадрата 9 фишек. Любая фишка может прыгать на свободное поле через рядом стоящую фишку (по диагонали, по вертикали и/или по горизонтали). Можно ли за некоторое количество таких ходов (прыжков) поставить все фишки вновь в форме квадрата, но в другом углу?

**4.** Найдите положительные решения ($x > 0$; $y > 0$) уравнения

$$\frac{1}{x+y} + \frac{y}{x+1} + \frac{x}{y+1} = \frac{3}{2}.$$

**5.** В треугольнике $ABC$ угол $C$ равен $\gamma$. На биссектрисы углов $A$ и $B$ этого треугольника опущены перпендикуляры $BK$ и $AL$ (точки $K$ и $L$ лежат на соответствующих биссектрисах). Найдите $KL$, если $AB = c$.

**6.** Решите в целых числах уравнение

$$\left(x^2 - y^2\right)^2 = 16y + 1.$$

**7.** Существует ли последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такая, что сумма $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2$ является полным квадратом при всех: а) $k \le 2$; б) $k \le 3$; в) $k \le 4$; г) $k \le n$, где $n$ – любое натуральное число.

### Физика

**1.** Кордовая модель самолета массой $m$ прикреплена к шнуру длиной $L$ и пренебрежимо малой массы (рис.1). Самолет движется с постоянной скоростью $v$ и описывает горизонтальную окружность на такой высоте, что шнур образует угол $\theta$ с поверхностью земли во все время движения. Найдите натяжение шнура при заданном угле $\theta$. Найдите также предельный угол $\theta_{пред}$, при котором само-

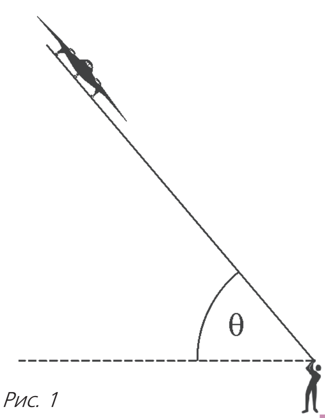


Рис. 1

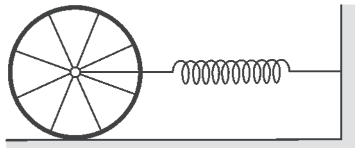


Рис. 2

лет еще способен летать.

**2.** Ось колеса массой $m$ и радиусом $r$ прикреплена с помощью пружины к вертикальной опоре (рис.2). Колесо смещают влево на расстояние $L$ и отпускают. Определите, через какое время колесо вернется в первоначальное положение, считая, что при движении колесо не проскальзывает. Жесткость пружины равна $k$, масса колеса сосредоточена в его ободе, т.е. массой оси и спиц пренебрегаем.

**3** Два одинаковых цилиндра содержат одинаковое количество идеального одноатомного газа при одной и той же температуре. В первом цилиндре газ находится под тяжелым поршнем массой $m$ = 20 кг, во втором цилиндре поршень невесомый, но он поддерживается пружиной так, что высота поршней над дном обоих цилиндров одинакова и равна $H$ = 40 см (рис.3). При подведении к цилиндрам одного и того же количества теплоты $Q$ = 200 Дж высота положения поршней изменилась. Определите, на каких высотах остановятся поршни. Давление среды над поршнями равно нулю. Недеформированная пружина касается дна цилиндра.

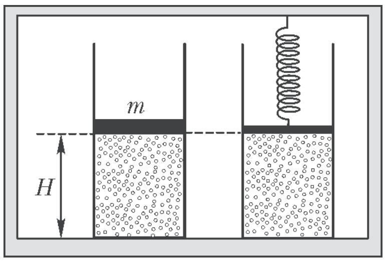



Рис. 3

**4.** В горизонтальном цилиндрическом сосуде длиной $l$ = = 2 м находятся $n$ = 9 подвижных теплонепроницаемых поршней, делящих сосуд на $n$ + 1 отсек. Первоначально температура газа во всех отсеках равна $T_0 = 300$ К, объемы всех отсеков одинаковы. Затем газ в самом левом отсеке нагревают до температуры $T_1 = 500$ К, а температуру газа в других отсеках поддерживают равной $T_0$. На сколько сместятся при этом самые крайние правый и левый поршни?

**5.** Грузик, привязанный к невесомой нерастяжимой нити, вращается в вертикальной плоскости вокруг точки $O$ по окружности радиусом $R$ = 5 см. Если нить перерезать в момент, когда грузик находится в верхней точке, он упадет на землю в точке $A$; если нить перерезать в момент, когда грузик находится в нижней точке окружности, он упадет на землю в точке $B$. Известно, что точки $A$ и $B$ равноудалены от точки $O$, которая находится на высоте $h$ над поверхностью земли. Найдите высоту $h$, на которой находится центр окружности (точка $O$), если $AB = L$ = 48 см.

**6.** На плоскую поверхность тонкой линзы, находящейся в воздухе, падает узкий пучок света, параллельный ее главной оптической оси. На экране, расположенном за линзой, наблюдается светлое пятно, диаметр которого в $k$ раз меньше диаметра падающего пучка, причем $k$ = 3. Найдите показатель преломления $n$ стекла линзы, если после погружения линзы с экраном (при неизменном расстоянии между ними) в воду диаметр светлого пятна на экране не изменяется. Показатель преломления воды $n_в = 4/3$.

**7.** Две частицы равной массы с одинаковыми электрическими зарядами в некоторый момент времени находятся на расстоянии $L$ = 45 см друг от друга и имеют скорости, равные по величине и ориентированные в одной плоскости под углами $\alpha = 45°$ к проходящей через заряды прямой (рис.4). Суммарная кинетическая энергия частиц в этот момент равна потенциальной энергии их электрического взаимодействия. До какого минимального расстояния сблизятся частицы?

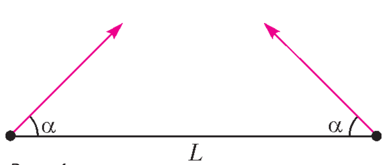



Рис. 4

*Устный командный тур*

### Математика

**1.** На прямой последовательно отложены отрезки $AB = 2$, $BC = CD = 1$, $DE = 2$. Точка $M$ лежит вне этой прямой, причем из нее все указанные отрезки видны под равными углами. Что это за углы?

**2.** Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Известно, что уравнение $f(x) = x$ не имеет действительных корней. Может ли иметь корни уравнение $f(f(x)) = x$?

**3.** Числа 1, 2, 3, …, 200 разбили на 50 непересекающихся групп. Всегда ли среди этих групп найдется такая, что в ней содержатся три числа, являющиеся сторонами некоторого треугольника?

**4.** На гипотенузе прямоугольного треугольника взяли точку $M$ и опустили из нее перпендикуляры на катеты. Как выбрать точку $M$, чтобы расстояние между основаниями проведенных перпендикуляров было как можно меньше?

**5.** Баба Яга получила от Змея Горыныча двое песочных часов, одни – на 3 минуты, другие – на 5 минут. Помогите Бабе Яге сварить зелье, если оно варится ровно 4 минуты.

**6.** Может ли десятичная запись квадрата целого числа оканчиваться цифрами: а) 75; б) 421?

**7.** На углу дома, размеры которого 6 метров на 4 метра, привязана собака. Длина привязи 10 метров. Найдите площадь участка, доступного собаке. Внутренность дома собаке недоступна (число $\pi$ округлите до 3).

**8.** Делится ли число $2^{62}+1$ на $2^{31}+2^{16}+1$?

**9.** Точки $A_1$, $B_1$ и $C_1$ симметричны центру $I$ вписанной в треугольник $ABC$ окружности относительно его сторон $BC$, $AC$ и $AB$ соответственно. Окружность, описанная около треугольника $A_1B_1C_1$, проходит через точку $A$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$, если $BC = a$.

**10.** По кругу лежат 10 монет орлами вверх. Разрешается одновременно перевернуть либо 4 подряд лежащие монеты, либо по две монеты справа и слева от какой-то монеты. Можно ли в результате таких операций получить все монеты орлами вниз?

### Физика

**1. Мост.** (5 мин) Параболический мост связывает два берега реки шириной $d$. Каков радиус кривизны моста в его верхней точке, если максимальная скорость движения автомобиля в этой точке составляет 60 км/ч?

**2. Рыбак.** (5 мин) Рыбак плыл на моторной лодке по реке, зацепил шляпой за мост, и она свалилась в воду. Рыбак поплыл дальше, но через полчаса, обнаружив пропажу, решил вернуться за шляпой. Лодка догнала шляпу на 4 км ниже моста. Чему равна скорость течения реки?

**3. Черепахи** (5 мин) Четыре черепахи находятся в углах квадрата со стороной $a$ и начинают двигаться одновременно с одинаковой и постоянной по модулю скоростью $v$. При этом первая черепаха все время держит курс на вторую, вторая – на третью, третья – на четвертую, четвертая – на первую. Через какое время и где черепахи встретятся?

**4. Спутник.** (7 мин) Известно, что из-за торможения спутника в атмосфере высота его орбиты уменьшается. Как изменяется при этом скорость спутника? Как согласуется это изменение с законом сохранения энергии?

**5. Гидростатическое давление.** (7 мин) Известно, что гидростатическое давление определяется высотой столба жидкости. Как изменится давление на дно каждого из представленных на рисунке 5 сосудов при нагревании воды?

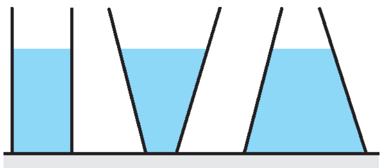


*Рис. 5*

**6. Дробь.** (5 мин) На весах уравновешен ящик, наполненный дробью. Останутся ли весы в равновесии, если заменить эту дробь более крупной, но сделанной из того же материала?

**7. Пассажир.** (7 мин) Пассажир первого вагона прогуливался по перрону. Когда он был у последнего вагона, поезд тронулся и начал двигаться с ускорением $a$. Пассажир сразу же побежал к своему вагону. С какой наименьшей скоростью он должен бежать, чтобы успеть сесть в первый вагон? Длина поезда $L$.

**8. Решето.** (7 мин) В сказках герои умели носить воду в решете. Сколько воды можно унести в круглом решете радиусом 10 см, если размер его ячейки $1 \times 1$ мм?

**9. Рейс самолета.** (10 мин) Оцените разность показаний пружинных весов, находящихся в самолете, летящем из Москвы во Владивосток и из Владивостока в Москву.

**10. Мокрое место.** (7 мин) Оцените скорость, с которой должна лететь муха, чтобы после удара о стену от нее не осталось «и мокрого места».

*История научных идей и открытий*

### Математика

**1.** *Кто из великих математиков* ввел в употребление знаки деления (:) в 1684 году и умножения $(\cdot)$ в 1698 году?

**2.** Аполлоний Пергский (ок. 250–170 гг. до н.э.) – один из величайших геометров Древней Греции – в одном из своих трудов сформулировал и решил такую задачу:

Дан отрезок $AB$. Найдите геометрическое место точек $M$ таких, что для их проекций $M'$ на отрезок AB выполняется равенство $AM' \cdot M'B = MM'^2$.

*Решите эту задачу.*

**3.** В 1844 году бельгийский математик Э.Каталан высказал гипотезу, что пара чисел $2^3 = 8$ и $3^2 = 9$ – единственная пара последовательных натуральных чисел, каждое из которых является целой большей степенью некоторого натурального числа. Гипотеза Каталана продержалась почти 160 лет, несмотря на усилия многих математиков. Лишь в 2003 году румынский математик П.Михайлеску доказал ее истинность.

Предлагаем вам задачу связанную с гипотезой Каталана: *Решите в натуральных числах уравнение*

$$3^x - 2^y = 1.$$

**4.** Выдающийся немецкий математик Г.Минковский (1864–1909) в своих исследованиях по «геометрии чисел» использовал некоторые новые метрики (расстояния) на плоскости. Он заменял обычные расстояния между точками на плоскости на новые в соответствии с таким определением:

Пусть $F$ – произвольная выпуклая центрально симметрическая фигура на плоскости. Нормой $\left\|\overline{OA}\right\|$ вектора $\overline{OA}$ назовем отношение расстояний $\dfrac{OA}{OA'}$, где $A'$ – точка пересечения луча $OA$ с границей фигуры $F$.

Нетрудно проверить, что норма вектора обладает всеми свойствами модуля в обычной геометрии, т.е. $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda|\,\|\vec{a}\|$, $\|\vec{a} + \vec{b}\| \le \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$. Расстоянием между точками $A$ и $B$ назовем $\left\|\overline{OA} - \overline{OB}\right\|$. В роли окружности единичного радиуса при таком определении выступает граница фигуры $F$.

*Запишите формулу расстояния между точками $A(x, y)$ и $B(x_1, y_1)$, если фигура $F$ – это квадрат на координатной плоскости, задаваемый неравенством $|x| + |y| \le 1$.*

**5.** В 2006 году молодой американский математик Теренс Тао был удостоен высшей награды Международного союза математиков – Филдсовской премии – за доказательство следующей удивительной теоремы: для любого натурального $N$ существует арифметическая прогрессия длины $N$, состоящая из простых чисел.

*Докажите, что разность арифметической прогрессии, состоящей из 15 простых чисел, больше 30000.*

### Физика

**1.** В 1922 году Нобелевская премия по физике была вручена «За заслуги в исследовании строения атомов и испускаемого ими излучения». Ученый, которому она была присуждена, прожил долгую жизнь, был признан во всем мире, имел выдающиеся научные достижения в области квантовой механики. Еще будучи магистром, он понял, что классические физические теории не могут полностью объяснить электромагнитные явления. Он работал с Э.Резерфордом и дискутировал с А.Энштейном. Его именем названа теория строения атома. Он был одним из создателей квантовой механики. Он сформулировал принцип, связывающий классическую и квантовую физику, также носящий его имя. Он был главой научной школы и создал институт, который сейчас носит его имя. Человек с широкими интересами и богатым чувством юмора, он любил музыку, занимался спортом (отлично играл в футбол), а в годы второй мировой войны ему пришлось бежать из родной страны в бомбовом люке самолета. В 1975 году Нобелевскую премию по физике «За открытие взаимосвязи между коллективным движением и движением отдельной частицы в атомном ядре и развитие теории строения атомного ядра, базирующейся на этой взаимосвязи» получил его сын.

*а) Кто этот ученый?*

*б) В какой стране он жил?*

*в) Назовите физический и философский принцип, о котором идет речь в тексте.*

**2.** В 1932 году Нобелевская премия по физике была вручена «За создание квантовой механики, применение которой привело, помимо прочего, к открытию аллотропических форм водорода». Но эта формулировка была слишком широкой, речь шла о создании одной из трактовок квантовой механики – ее уравнений в матричной форме. Среди научных достижений этого ученого – принцип, который определил степень неопределенности в Природе. Он работал в области гидродинамики, ядерной физики, квантовой теории поля. У него была большая семья, все его дети стали крупными учеными в самых разных областях науки. Он всю жизнь прожил в родной стране, хотя для этого ему пришлось сделать непростой выбор.

*а) Кто этот ученый?*

*б) В какой стране он жил?*

*в) Назовите и попытайтесь кратко сформулировать физический и философский принцип, о котором идет речь в тексте.*

**3.** Древнегреческий ученый: математик, физик, инженер (наверное, первый в истории ученый-инженер). Он жил в одной из средиземноморских греческих колоний. В молодости он много путешествовал, учился в Александрии Египетской, работал в Александрийской библиотеке. Был знаком и вел переписку с ученым, впервые в истории измерившим диаметр Земли и придумавшим «решето» для простых чисел. Вычисление объема тел и площадей фигур, оценка значения числа $\pi$, расчет центров тяжести плоских фигур и правило рычага, гидростатические законы и гидравлические конструкции, оптические теоремы и устройства, военная техника и строительство – вот далеко не полный перечень его работ. О нем сложены легенды, о возможности реализации некоторых его легендарных конструкций до сих пор идут споры. Он прожил 75 лет и погиб в 212 году до н.э. при взятии его родного города чужестранной армией. Его именем названы математические аксиомы, физические законы и технические устройства, астероид, горная цепь и кратер на Луне, площадь в его родном городе, улицы в двух городах Украины, одном городе России и одном городе Нидерландов.

*а) Кто этот ученый?*

*б) Где находится его родной город и как он называется?*

*в) Назовите имя греческого ученого из Александрии, о котором упоминается в тексте.*

**4.** В 2012 году международным коллективом ученых, работающем в крупнейшем научном центре мира, было объявлено, что обнаружена частица, которая с большой вероятностью может быть распознана как последняя теоретически предсказанная Стандартной теорией частица. Важность этого открытия в том, что, по мнению физиков-теоретиков, эта частица участвует в формировании такого важного свойства материи, как масса.

*а) О какой частице идет речь?*

*б) Где были проведены эксперименты по поиску этой частицы?*

**5.** 14 октября 1967 года был запущен самый крупный в СССР (а на тот момент и в мире) ускоритель протонов. В исследованиях на этом ускорителе открыты уникальные физические явления, связанные с выходом на новый уровень строения материи. Этот ускоритель, крупнейший в России, работает и в настоящее время.

*Где находится этот ускритель?*

## I МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 5–8 КЛАССОВ

*Письменный индивидуальный тур*

5–6 классы

**1.** В соревновании участвовали 40 стрелков. Первый выбил 50 очков, второй – 70, третий – среднее арифметическое очков первых двух, четвертый – среднее арифметическое очков первых трех. Каждый следующий выбил среднее арифметическое очков всех предыдущих. Сколько очков выбил 32-й стрелок?

**2.** В день рождения Шрека его дети хотят выяснить, сколько лет отцу. Фиона говорит, что Шреку больше 31 года, а маг-неудачник Румпельштильцхен утверждает, что больше 30 лет. Сколько лет Шреку, если известно, что один из них ошибся (либо Фиона, либо маг-неудачник Румпельштильцхен)?

**3.** Из своих норок одновременно навстречу друг другу выскочили 2 зайчонка. Через 3 мин они столкнулись нос к носу и, перепугавшись, бросились в обратные стороны с такими же скоростями. Через 30 с после встречи зайчата остановились, и расстояние между ними было 21 м. Скорость одного зайчонка на 6 м/мин больше скорости другого. На каком расстоянии от своей норки оказался более быстрый зайчонок?

**4.** Сколько существует трехзначных чисел, сумма цифр которых равна 9?

**5.** В комнате стоят трехногие табуретки и четырехногие стулья. Когда на все эти сидячие места уселись люди, в комнате оказалось 39 ног. Сколько в комнате табуреток?

**6.** Найдите такие два числа, чтобы их сумма, произведение и частное от деления одного на другое были равны между собой.

7–8 классы

**1.** Пусть $a + b = -8$, $a \cdot b = 15$. Найдите, чему равна величина $a^2 + a^3 + b^2 + b^3$.

**2.** Водитель автомашины грубо нарушил правила дорожного движения, чему свидетелями стали три студента-математика. Номер машины они не запомнили, но сообщили следующее: 1) номер был четырехзначный; 2) две первые цифры были одинаковы; 3) две последние цифры также были одинаковы; 4) это четырехзначное число являлось точным квадратом. Помогите сотрудникам автоинспекции понять математиков и определить номер машины.

**3.** Собранный мед заполняет несколько 50-литровых бидонов. Если его разлить в 40-литровые бидоны, то понадобится на 5 бидонов больше и один из них останется неполным. Если собранный мед разлить в 70-литровые бидоны, то понадобится на 4 бидона меньше и один из них тоже останется неполным. Сколько 50-литровых бидонов заполняет собранный мед?

**4.** На доске в строчку выписаны пять неотрицательных целых чисел *a*, *b*, *c*, *d* и *e*, сумма которых равна 2010. Найдите наибольшее значение суммы $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot d + d \cdot e$ попарных произведений соседних чисел.

**5.** Два велосипедиста одновременно стартовали на двух разных, но пересекающихся прямолинейных дорогах. Оба едут с постоянной скоростью 10 км/ч в сторону перекрестка, где их дороги пересекаются. В момент старта один из велосипедистов находился на расстоянии 50 км от перекрестка, а другой – на расстоянии 30 км от перекрестка. Через сколько часов после старта оба велосипедиста окажутся на одинаковом расстоянии от перекрестка?

**6.** Из разбившейся авторучки на квадратный ковер размером $4 \times 4$ м попали 15 чернильных брызг. Докажите, что из этого ковра можно вырезать чистый квадрат со стороной 0,999 м. (Брызги можно считать точками.)

**7.** Генерал построил солдат в колонну по 4, но при этом только солдат Иванов остался лишним. Тогда генерал построил солдат в колонну по 5. И снова один Иванов остался лишним. Когда же и в колонне по 6 опять только один Иванов остался лишним, генерал посулил ему наряд вне очереди, после чего в колонне по 7 Иванов нашел себе место и никого лишнего не осталось. Какое наименьшее количество солдат могло быть у генерала?

*Устный командный тур*

5–6 классы

**1.** Какое число в последовательности 2, 6, 12, 20, 30, … стоит на 12-м месте?

**2.** Дан прямоугольник с площадью, равной 2400 $см^2$. Одна из его сторон равна стороне равностороннего треугольника с периметром 9 дм. На стороне прямоугольника построен другой прямоугольник, периметр которого равен периметру квадрата с площадью 36 $дм^2$. Найдите площадь получившегося прямоугольника. Рассмотрите разные случаи.

**3.** Сколько существует двузначных чисел, сумма цифр каждого из которых равна 5?

**4.** Из Астрахани везли в Москву 1000 тонн арбузов, первоначальная влажность которых составляла 99%. Когда их привезли в Москву, оказалось, что влажность уменьшилась на 1%, т.е. стала 98%. Каков вес арбузов, прибывших в Москву?

**5.** Имеются чашка кофе и бидон молока. Переливаем из бидона чайную ложку молока в чашку с кофе, перемешиваем и переливаем из чашки чайную ложку содержимого обратно в бидон. Чего оказалось больше: молока в чашке или кофе в бидоне?

**6.** Докажите, что число $n^3+2n$ делится на 3 для любого натурального $n$.

**7.** Дано шестизначное число $\overline{abcdef}$, причем $\overline{abc}-\overline{def}$ делится на 7. Верно ли, что и само число делится на 7?

7–8 классы

**1.** Обозначим две какие-нибудь цифры буквами $x$ и $a$. Делится ли шестизначное число $\overline{xaxaxa}$ на 7 без остатка?

**2.** Малыш из Цветочного города умеет откладывать угол величиной $19°$. Сможет ли он отложить угол в $1°$?

**3.** Сумма двух чисел равна 480. Если у первого числа зачеркнуть последнюю цифру, то получится второе число, деленное на 7. Найдите эти числа.

**4.** Пассажир метро бежит вниз по эскалатору, идущему вниз, и считает ступеньки. Пробежав весь эскалатор, он насчитал 30 ступенек. Проделав то же самое на эскалаторе, идущем вверх, он насчитал 90 ступенек. Сколько ступенек на неподвижном эскалаторе?

**5.** На школьном вечере девочки и мальчики несколько раз танцевали парами. Каждая девочка танцевала 4 раза, а каждый мальчик — 3 раза. Всего на вечере было 112 школьников. (В каждом танце участвовали все.) Сколько было девочек?

**6.** Два лыжника шли с постоянной скоростью 6 км/ч на расстоянии 200 метров друг от друга. Потом они стали подниматься в горку, где их скорость упала до 4 км/ч. Затем оба лыжника съехали с горки со скоростью 7 км/ч и попали в глубокий снег, где их скорость была всего 3 км/ч. Каким стало расстояние между ними?

**7.** Дан прямоугольник $ABCD$. Как разрезать его на наименьшее число частей так, чтобы из них можно было сложить некоторый треугольник?

**8.** В вершинах нескольких одинаковых по размеру правильных картонных треугольников в произвольном порядке написаны числа 1, 2, 3 (в каждом треугольнике встречаются все три числа). Треугольники сложили в стопку так, что их вершины совпали. Могут ли суммы чисел, написанных в каждой вершине стопки, быть равны: *а*) 2013; *б*) 2012?

**9.** Сказал Кащей Бессмертный Ивану Царевичу: «Утром явишься предо мной. Я задумаю три цифры, $a$, $b$ и $c$, а ты назовешь мне три числа, $x$, $y$ и $z$. Я выслушаю тебя и скажу тебе, чему равно выражение $ax+by+cz$. После этого ты должен угадать, какие цифры $a$, $b$ и $c$ я задумал. Не угадаешь – голова с плеч. Ступай». Можно ли помочь Ивану Царевичу сохранить голову?

*Публикацию подготовили В.Альминдеров, А.Егоров, А.Кравцов, В.Крыштоп, Ж.Раббот, Л.Шляпочник*

# Региональная студенческая олимпиада по физике

В апреле 2013 года Национальный исследовательский Иркутский государственный технический университет провел очередную Региональную олимпиаду для студентов технических вузов Сибири и Дальнего востока. В олимпиаде участвовали команды семи региональных вузов и (вне конкурса) московская команда Российского государственного университета нефти и газа имени И.М.Губкина.

Задачи прошедшей олимпиады отличаются нестандартными формулировками. Вниманию читателей предлагаются некоторые из этих задач.

### Задачи олимпиады

**1.** Столкновения галактик во Вселенной происходят очень часто. Астрономы сходятся на том, что рано или поздно Млечный Путь ($m_1=6\cdot10^{42}$ кг) столкнется со своей соседкой – Туманностью Андромеды ($m_2=9\cdot10^{42}$ кг). Скорость сближения галактик и расстояние между ними равны $v_0=100$ км/с и $l=2{,}5$ млн св.лет $\approx 2{,}4\cdot10^{19}$ км соответственно. Оцените время до их столкновения, не учитывая начальную скорость галактик и считая, приближенно, что массы галактик одинаковы и равны $M=7\cdot10^{42}$ кг. Постоянная всемирного тяготения $G=6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м$^2$/кг$^2$. (7 баллов)

*Математическая справка*:

$$\int\sqrt{\frac{l-2x}{x}}dx=\sqrt{x(l-2x)}-\frac{l}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{l-2x}{2x}}+\text{const}\,.$$

**2.** Весной пенсионер Иванов – как обычно, с высоты птичьего полета $h=12$ м – наблюдал за жизнью страны. Вдруг с крыши дома оторвалась сосулька и пролетела мимо него за время $\Delta t=0{,}2$ с. Высота окна $L=1{,}5$ м. С какой высоты сосульки угрожающе нависают над прохожими? (4 балла)

**3.** Ниндзюцу – японское боевое искусство. Широко использовалось в системе стратегического шпионажа и войсковой разведки XV века. В атаке ниндзя (лазутчики) иногда применяли тяжелые плоские металлические звездочки массой $M$, имеющие форму квадратной пластины со стороной $d$ с равносторонним треугольным шипом на каждой стороне (рис.1). Получите, *не используя интегрирование*, выражение для момента инерции $I_z$ звездочки ниндзя относительно оси $z$, проходящей перпендикулярно пластине через ее центр.

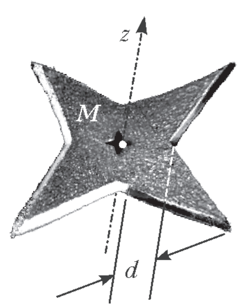


Рис. 1

*Указание*: при помощи теоремы Штейнера получите выражения для моментов инерции квадратной и правильной треугольной пластин относительно центральной поперечной оси. (7 баллов)

**4.** Почему при варке сосиски лопаются вдоль, а не поперек? (4 балла)

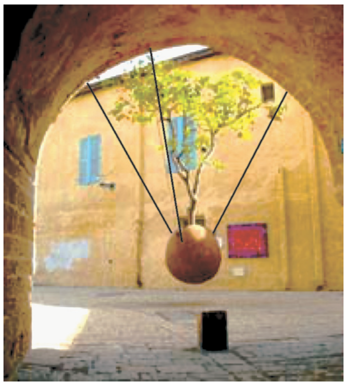


*Рис. 2*

**5.** Яффо – один из главных древних портов Израиля (через него проходил знаменитый Морской путь – Египет, Сирия, Анатолия и Месопотамия). Достопримечательность Яффо – висящее апельсиновое дерево (рис.2). Дерево растет с 1993 года в горшке-яйце, которое (из-за нехватки земли) подвешено тросами к домам. Дерево живет и плодоносит. Длина каждого троса $l = 7$ м, площадь сечения $S = 0{,}6\ \text{см}^2$. Под весом дерева тросы растянуты на $\Delta l = 3$ мм, а углы их наклона почти одинаковы и равны $\alpha = 45°$. Коэффициент упругости стали (модуль Юнга) $E = 216$ Гпа. Определите, сколько апельсинов созрело на дереве, если частота его покачиваний по вертикали уменьшилась на 0,1%. Масса апельсина $m \approx 150$ г. (4 балла)

**6.** Винни-Пух подумал: «Это ж-ж-ж неспроста!» – и решил, как он сам говорит, «модернезировать» дупло с пчелами, подключив к нему лампочку. Для того чтобы получить питание для лампочки, он снова подумал: «Раз пчела жужжит, значит, она заряж-жена из-за трения о воздух». После такой умной мысли он смело поместил два контакта от идущих от лампы проводков в рой пчел, жужжащих вокруг меда. Один контакт он поместил в центр, а второй – на край роя радиусом $R$. Сове поручили нарисовать график зависимости потенциала $\varphi(r)$ внутри роя пчел от расстояния $r$ между произвольной точкой внутри роя и его центром. Умный Кролик, по просьбе Пуха, рассчитал $\Delta\varphi$ – напряжение на лампочке. Известно, что Пух убедил Кролика в том, что пчел очень много, их концентрация $n = a/r$, где $a$ – постоянный коэффициент, а заряд одной пчелы $q$. Проверьте проведенные расчеты. И еще – Пух просил подсчитать, сколько там всего пчел. (7 баллов)

**7.** В тридевятом царстве, тридесятом государстве жил-был царь. Решил царь жениться – позвал царь Бабу-Ягу помочь ему стать моложе и чтобы лысина исчезла. Однако травки да поганки не помогали. Приказал тогда царь Ивану-дураку придумать, как быть. А Иван был не совсем-то уж дурак – предложил провести по верхнему краю серебряной короны царя (рис.3) медный провод с изоляцией, а по нему пустить ток, для «роста волос под действием магнитного поля». А еще, для убедительности, Иван рассчитал значение магнитного поля в районе макушки царя (т.е. в точке, лежащей в одной плоскости с шестью вершинами «зубов» короны и равноудаленной от них). Повторите расчет и скажите, во сколько раз изменилось бы магнитное поле, если бы контур с таким же током имел вид кругового витка, проходящего через те же вершины. (7 баллов)


*Рис. 3*

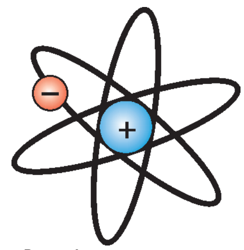


*Рис. 4*

**8.** Атом мюония (рис.4) состоит из неподвижного протона и отрицательно заряженного мюона массой $m_\mu = 206 m_e$, где $m_e$ – масса электрона, и зарядом, равным заряду электрона $e$. Определите, во сколько раз атом мюония меньше атома водорода. (6 баллов)

*Публикацию подготовил Е.Липовченко*

# ИНФОРМАЦИЯ

## Заочная школа СУНЦ НГУ

В новосибирском Академгородке в составе Специализированного учебно-научного центра Новосибирского государственного университета (СУНЦ НГУ) физико-математического и химико-биологического профиля уже более 45 лет работает Заочная физико-математическая школа (ЗШ) для учащихся 5–11 классов общеобразовательных школ.

Учащиеся ЗШ, успешно выполнившие все задания, по окончании одиннадцатого класса получают удостоверение выпускников Заочной школы СУНЦ НГУ.

Преподаватели общеобразовательных учреждений могут работать по программам Заочной школы СУНЦ НГУ в форме факультативных занятий с группой учащихся.

Ежегодно лучшие ученики 9 и 10 классов ЗШ приглашаются в Летнюю школу, которая проводится в новосибирском Академгородке с 1 по 23 августа, для участия в конкурсе в СУНЦ НГУ.

В ЗШ СУНЦ НГУ принимаются все желающие, независимо от возраста. Прием в школу ведется круглогодично. Чтобы стать учеником ЗШ, необходимо прислать заявление, указав класс и отделения, на которых вы хотите учиться, свои фамилию, имя и отчество (печатными буквами), свой подробный адрес с индексом и выполненное первое задание. Задание выполняется в обычной ученической тетради и высылается простой или заказной бандеролью.

Можно присылать работы и по электронной почте. Требования к оформлению работ в электронном виде и подробную информацию можно найти на сайте Заочной школы:

http://zfmsh.nsu.ru

Наш адрес: 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, Заочная школа СУНЦ НГУ

Телефон/факс: (383) 363-4066

E-mail: distant@sesc.nsu.ru или zfmsh@yandex.ru

### ПЕРВЫЕ ЗАДАНИЯ НА 2013/14 УЧЕБНЫЙ ГОД

#### Математическое отделение

МАТЕМАТИКА

*5 класс*

**1.** В прямоугольнике сумма двух каких-то сторон равна 9,5 см, а сумма трех каких-то сторон равна 7,5 см. Найдите периметр этого прямоугольника.

**2.** Автомобиль от пункта $A$ до пункта $Б$, двигаясь с некоторой постоянной скоростью, едет 25 минут. Если бы он ехал со скоростью на 3 км/ч больше, то весь путь проехал бы за 24 минуты. Найдите расстояние от пункта *А* до пункта *Б*.

**3.** Найдите количество трехзначных номеров, записываемых цифрами от 0 до 9 включительно, у которых первая и последняя цифры не совпадают.

**4.** Представьте число 60 в виде суммы нескольких (больше одного) подряд идущих натуральных чисел.

**5.** Решите уравнение $1-(2-(3-\ldots-(100-x)\ldots))=100x$.

**6.** Все натуральные числа от 1 до 2013 включительно выписали подряд и нашли сумму всех цифр. Найдите, какой остаток получится при делении этой суммы на 9.

*6 класс*

**1.** Решите уравнение $1-(2-(3-\ldots-(1000-x)\ldots))=$ $=1000x$.

**2.** См. задачу 2 для 5 класса.

**3.** Найдите количество трехзначных номеров, записываемых цифрами от 0 до 9 включительно, у которых средняя цифра не совпадает ни с одной из крайних.

**4.** Представьте число 90 в виде суммы нескольких (больше одного) подряд идущих натуральных чисел.

**5.** Найдите, как нужно разрезать прямоугольник со сторонами 8 см и 4,5 см на две равные части, из которых можно составить квадрат.

**6.** Докажите, что на клетчатой бумаге треугольник с вершинами в узлах сетки не может иметь площадь, которая в единицах измерения площади, равных площади одной клетки, записывается в виде несократимой дроби со знаменателем 4.

*7 класс*

**1.** Решите уравнение $1+1:(1+1:(1+1:(x+2013)))=$ $=(1{,}2)^2$.

**2.** В стоячей воде скорость теплохода 35 км/ч, а скорость катера 55 км/ч. По реке из пункта *А* в пункт *Б* вниз по течению теплоход идет 40 минут, а катер – 30 минут. Найдите расстояние от пункта *А* до пункта *Б*.

**3.** Найдите количество трехзначных чисел, которые делятся на 3, но не делятся на 7.

**4.** В квадрате $ABCD$ точка $M$ на стороне $AB$ и точка $N$ на диагонали $AC$ расположены так, что $AM : MB = 3 : 4$, $AN : NC = 5 : 2$. Докажите, что угол $DNM$ прямой.

**5.** Представьте число 100 в виде суммы нескольких (больше одного) подряд идущих натуральных чисел.

**6.** См. задачу 6 для 6 класса.

*8 класс*

**1.** См. задачу 2 для 7 класса.

**2.** Решите уравнение $|x-1|+|x-3|+|x-7|=6$.

**3.** В прямоугольнике $ABCD$ точки $M$ и $N$ – середины сторон $AB$ и $CD$ соответственно. Через точку $M$ проводится прямая, пересекающая диагональ $AC$ в точке $P$ и продолжение стороны $BC$ в точке $Q$, причем точка $B$ лежит между точками $C$ и $Q$. Докажите, что $\angle MNP=\angle MNQ$.

**4.** Докажите, что число $\left(\sqrt{2}-1\right)^{100}$ можно представить в виде $\sqrt{m+1}-\sqrt{m}$, где $m$ – натуральное число.

**5.** Докажите, что из любых 23 натуральных чисел можно выбрать ровно 12, сумма которых делится на 12.

**6.** Найдите, как нужно разрезать квадрат на 20 равных треугольников, чтобы из полученных частей можно было составить 5 равных квадратов.

*9 класс*

**1.** Найдите, при каком наименьшем значении $a$ уравнение $|x-1|+|x-2|+|x-3|+\ldots+|x-9|=a$ имеет решения.

**2.** Докажите, что число $\left(\sqrt{3}+1\right)^{10}$ можно представить в виде $\sqrt{m+1024}+\sqrt{m}$, где $m$ – натуральное число.

**3.** Докажите, что число $2015^4+4$ не является простым.

**4.** Две окружности пересекаются в точках $A$ и $B$. Через точку $B$ проводится прямая, пересекающая окружности в точках $M$ и $N$ так, что $AB$ является биссектрисой в треугольнике $AMN$. Докажите, что отношение отрезков $BM$ и $BN$ равно отношению радиусов окружностей.

**5.** Найдите количество трехзначных номеров, записываемых цифрами от 0 до 9 включительно, у которых сумма цифр делится на 3.

**6.** См. задачу 6 для 8 класса.

*10 класс*

**1.** По дорожке стадиона длиной 400 м из одной точки одновременно в одном направлении выбегают три спортсмена со скоростями 12 км/ч, 15 км/ч и 17 км/ч. Найдите, через какое наименьшее время спортсмены поравняются.

**2.** См. задачу 3 для 9 класса.

**3.** Решите уравнение $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{386-x}=6$.

**4.** Биссектрисы двух углов перпендикулярны, а их стороны пересекаются в четырех точках. Докажите, что эти точки расположены на одной окружности.

**5.** Найдите, на какую наибольшую степень числа 3 делится произведение всех натуральных чисел от 1 до 2013 включительно.

**6.** Найдите, как нужно разрезать квадрат на 60 равных треугольников, чтобы из полученных частей можно было составить 10 равных квадратов.

*11 класс*

**1.** В квадрате $ABCD$ со стороной 1 точки $M$, $N$, $K$ и $L$ – середины сторон $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ соответственно. Найдите площадь квадрата с вершинами в точках пересечения отрезков $AN$, $BK$, $CL$ и $DM$.

**2.** Представьте число 10000 в виде суммы нескольких (больше одного) подряд идущих натуральных чисел.

**3.** Сфера касается ребер $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ пирамиды в точках $M$, $N$, $K$ и $L$. Докажите, что точки $M$, $N$, $K$ и $L$ расположены в одной плоскости.

**4.** Решите уравнение $1+x^2+5\log_2^2 x=(2x+1)\log_2 x^2$.

**5.** См. задачу 6 для 10 класса.

**6.** Докажите, что для каждой прямой на координатной плоскости можно найти параллельную ей прямую, которая не содержит ни одной точки с целочисленными координатами.

## Физическое отделение

### ФИЗИКА

*7 класс*

**1.** Пассажир поезда смотрит на вагоны встречного поезда. В момент, когда последний вагон встречного поезда прошел мимо его вагона, пассажир ощутил (по виду из его окна), что движение его вагона резко замедлилось. Почему? Объясните подробней.

**2.** Определите высоту дома, если длина его тени равна $L$, а длина тени от вертикального столба высотой $h$ равна $l$.

**3.** Почему падающие вертикально дождевые капли в безветренную погоду оставляют наклонные прямые полосы на стеклах равномерно движущегося вагона?

**4.** Муха летает со скоростью $u$ между двумя баранами, которые хотят столкнуться лбами. Определите путь мухи до столкновения баранов, если скорости баранов $v$, а начальное расстояние между ними $L$.

**5.** Измерьте линейкой длину, ширину и высоту твердой коробки, например из-под обуви. Определите площадь каждой поверхности и объем коробки. Оцените ошибку каждого из проведенных выше измерений.

**6.** Измерьте диаметр цветного карандаша из набора карандашей с помощью обычной линейки с минимально возможной ошибкой.

*8 класс*

**1.** Оцените силу давления воды на плотину ГЭС, если ее длина $L = 1$ км, а высота $H = 100$ м.

**2.** Тело в воде весит в три раза меньше, чем в воздухе. Чему равна плотность тела?

**3.** Катер, двигаясь по течению реки из пункта $A$ в пункт $Б$, прошел весь путь за время $t_1$, а двигаясь против течения, – за время $t_2$. Расстояние между пунктами $s$. Найдите скорость течения реки.

**4.** Два поезда длиной $L_1 = 150$ м и $L_2 = 100$ м движутся навстречу друг другу со скоростями $v_1 = 10$ м/с и $v_2 = 15$ м/с. В течение какого времени проходит первый поезд перед окном второго?

**5.** Тело массой $m$, упавшее с некоторой высоты, приобрело скорость $v$. С какой высоты упало тело? Какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы поднять тело на эту высоту?

**6.** Штангист поднимает штангу массой $m = 140$ кг на высоту $H = 0{,}8$ м за время $t = 0{,}4$ с. Какую мощность он развивает?

*9 класс*

**1.** Из деревни Простоквашино по одной дороге одновременно в одном направлении отправляются Кот Матроскин и Дядя Федор. Дядя Федор идет пешком, а Матроскин катит на велосипеде. Через время $t$ Матроскин догоняет Федора. С какой скоростью двигался Матроскин, если он ехал в четыре раза быстрее Федора, а дорога была круговой и имела радиус $R$?

**2.** Шарик прикреплен к нитке. Если за нитку тянуть вверх с силой $F_1$, он плавает, наполовину погрузившись в воду (рис.1). Для того чтобы шарик утонул, нитку нужно тянуть вниз с силой $F_2$. Определите массу шарика.

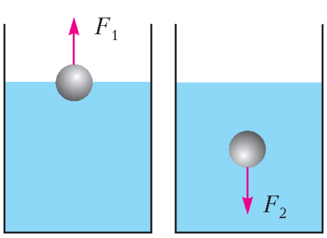


Рис. 1

**3.** Остановившись на ночлег, турист развел костер и подвесил над костром котелок со снегом. После того как снег растаял, котелок оказался неполным, и турист бросил в него новую порцию снега. На рисунке 2 показан график изменения температуры в котелке. Во сколько раз новая порция снега увеличила количество воды в котелке, если она была добавлена в момент времени $t_2$? Оцените температуру снега, считая теплоемкости снега и воды одинаковыми.

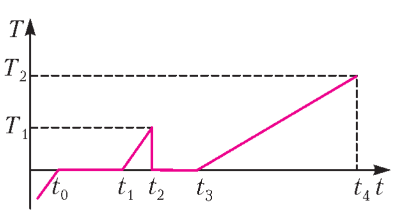


Рис. 2

**4.** Имеется бухта проволоки и диэлектрический щит, на котором смонтированы три клеммы, расположенные в вершинах правильного треугольника (рис.3). Сопротивление прямого отрезка проволоки между двумя клеммами равно $R$. Можно ли, подключая к клеммам разное количество прямых отрезков проволоки, получить сопротивление между клеммами с точным значением $(1/5)R$, $(2/5)R$, $(3/5)R$ и $(4/5)R$? Как это сделать?

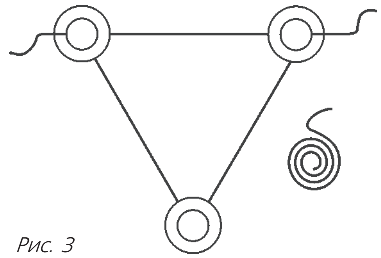


Рис. 3

*10 класс*

**1.** На рисунке 4 изображена карта. Красная линия на карте – дорога. По дороге движется автобус. В момент времени $t_1$ = 12 ч 30 мин он находился в точке $A$, а через двадцать минут – в точке $B$. Турист шел по прямой тропинке, изображенной синей линией. Он находился в точке $A_1$, когда часы показывали время $t_3$ = 8 ч, и в точке $B_1$ – в 10 ч. Сколько времени турист будет на обочине дороги дожидаться автобуса?

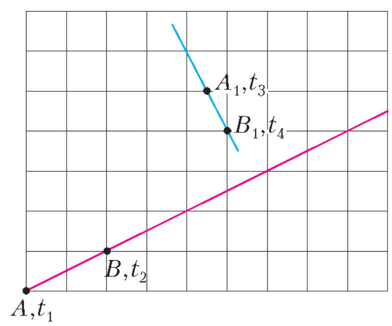


Рис. 4

**2.** Два встречных поезда одинаковой длины $L$ двигались, разгоняясь с одним и тем же по модулю ускорением. В момент времени, когда встретились головы поездов, их скорости были $v_1$ и $v_2$. Определите скорости поездов, когда разошлись их последние вагоны, если это произошло на расстоянии $L_1$ от места встречи в направлении движения первого поезда.

**3.** На весах стоит чашка (рис.5). В чашке плавает, погрузившись на 3/4 в воду, деревянный брусок кубической формы. Весы показывают $P_1$. После того как брусок, приложив некоторую силу, утопили, показания весов стали $P_2$. Когда брусок аккуратно вынули, весы стали показывать $P_3$. Какая масса воды вылилась из чашки?

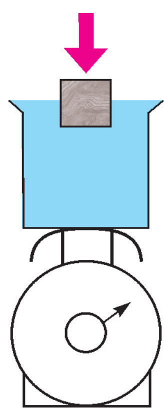


Рис. 5

**4.** Решите задачу 3 для 9 класса.

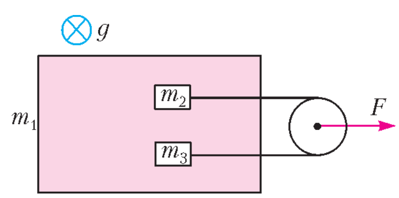


Рис. 6

**5.** Коврик массой $m_1$ и невесомый блок находятся на гладком столе (рис.6). На коврике лежат два бруска массами $m_2$ и $m_3$, связанные переброшенной через блок невесомой нитью. При какой минимальной приложенной к блоку силе $F$ оба бруска будут скользить по коврику? Коэффициент трения между брусками и ковриком $\mu$. Трение между остальными предметами отсутствует.

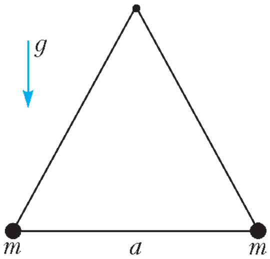


Рис. 7

*11 класс*

**1.** Решите задачу 1 для 10 класса.

**2.** Две одинаковые заряженные бусинки массой $m$ каждая нанизаны на кольцо из легкой нити. Нить подвешена, и бусинки в положении равновесия образуют с точкой подвеса правильный треугольник со стороной $a$ (рис.7). Определите заряд бусинок.

**3.** В проволочном квадрате две противоположные стороны соединили отрезком той же самой проволоки, из которой сделан квадрат. Определите отношение сопротивлений между точками $A$ и $B$ при двух разных способах соединения (рис.8).

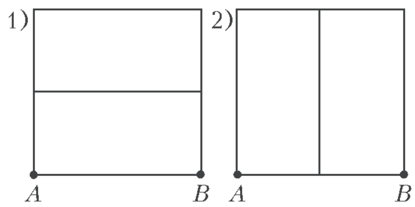


Рис. 8

**4.** Герметичный бак разделен горизонтальной перегородкой на две части: нижняя имеет высоту $h$, а верхняя – $2h$ (рис.9). Верхняя секция бака наполовину заполнена жидкостью. Свободные объемы бака заполнены воздухом с давлением $p$. В перегородке открылась течь – половина жидкости просочилась в нижний отсек, после чего процесс утечки остановился. Определите плотность жидкости.

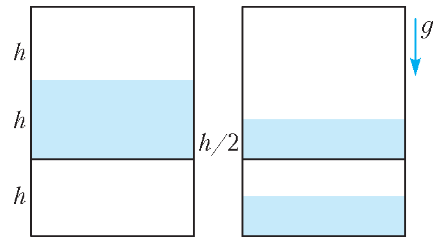


Рис. 9

**5.** Два одинаковых бруска лежат друг за другом на горизонтальном столе (рис.10). С левого края левого бруска с начальной скоростью $v$ пускают шайбу. Она скользит по поверхности первого бруска, переходит на второй и прекращает скольжение посредине второго бруска. Трение брусков о стол отсутствует. Определите конечные скорости тел. Шайба и бруски имеют одинаковые массы.

Рис. 10

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

### ЗАДАЧИ

*(см. «Квант» №2)*

**1.** По 50 рублей.

Пусть магазин покупал фломастеры у производителя по цене $x$ рублей за один набор. Тогда выгода магазина от продажи одного набора равна $100 - x$ рублей. При покупке двух наборов покупатель получает третий в подарок, поэтому выгода магазина в этом случае составляет $2(100 - x) - x = 200 - 3x$ рублей. Приравнивая эти две величины, находим, что $x = 50$.

**2.** На рисунке 1 показано, как комендант выполнял приказы своих начальников.

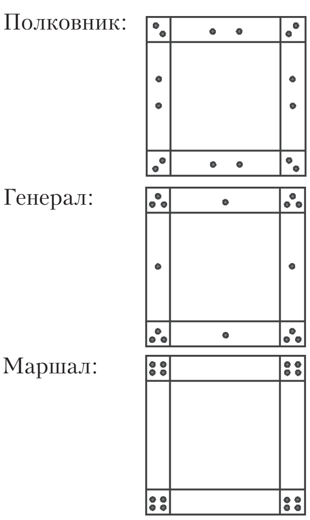


Рис. 1

**3.** Можно.

Из условия задачи следует, что в кармане у Пети все монеты, кроме, быть может, двух, точно рублевые, а все, кроме, возможно, трех, обязательно двухрублевые. Поэтому из пяти вытащенных монет три будут рублевыми, а две – двухрублевыми.

**4.** 7 см или 11 см.

Докажем, что суммы длин кусочков, отпиленных от противоположных ножек табуретки, равны. Так как ножки параллельны друг другу, то плоскость, проведенная через любые две соседние ножки, будет параллельна плоскости, проведенной через две другие ножки. Значит, эти две плоскости пересекают любую третью плоскость (которая им не параллельна) по двум параллельным прямым.

Поскольку после Васиной диверсии табуретка стоит на полу, касаясь его всеми четырьмя ножками, то четырехугольник, образованный концами ножек, лежит в плоскости пола. Из сказанного в предыдущем абзаце следует, что этот четырехугольник – параллелограмм. Значит, его диагонали делятся точкой пересечения $O$ пополам. Пусть $Q$ – центр квадратного сидения табуретки. Рассмотрим трапецию, основаниями которой являются остатки противоположных ножек табуретки. Отрезок $OQ$ – ее средняя линия, поэтому сумма оснований равна $2OQ$. Аналогично, точно такой же будет сумма оснований трапеции, построенной на другой паре противоположных ножек. Получается, что суммы длин оставшихся «противоположных» ножек равны. Так как изначально ножки у табуретки были одинаковыми, то и суммы длин «противоположных» отпиленных кусочков равны.

Пусть теперь $x$ – длина потерянного кусочка. Есть три варианта, какой из оставшихся кусочков был по диагонали от потерянного. Рассмотрев каждый из вариантов, получим уравнения

$$8 + x = 9 + 10\,,$$

$$9 + x = 8 + 10\,,$$

$$10 + x = 8 + 9\,.$$

Решая их, находим, что потерянный кусочек мог иметь длину 7, 9 или 11 см. Но так как длины всех кусочков различны, то 9 см не подходит.

Проверьте, что оба оставшихся варианта возможны.

**5.** Не могут.

Обозначим эти шайбы буквами *А*, *Б*, *В*, обходя образованный ими треугольник по часовой стрелке. В этот момент нам не важно, с какой именно шайбы начинать, но далее будем обходить их, начиная с *А* (и также по часовой стрелке). Заметим, что после каждого броска хоккеиста меняется циклический порядок шайб: если они располагались в порядке *АБВ* до броска, то потом их порядок станет *АВБ*. Это означает, что после любого нечетного числа бросков циклический порядок шайб будет не таким, как сначала. Поэтому через 13 бросков шайбы точно не смогут занять свои начальные места.

## КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6-8»

*(см. «Квант» №1)*

**11.** Заметим, что 12-е простое число – это 37, и оно больше 36 – своего утроенного номера. Докажем теперь, что если простое число $p$ больше своего утроенного номера, то и следующее за ним простое число обладает этим свойством. Пусть у $p$ номер $n$, тогда $p > 3n$, т.е. $p \geq 3n+1$. Следующее за ним простое не может равняться $3n+2$, так как два простых числа никогда не идут подряд (кроме чисел 2 и 3). Также оно не может равняться составному числу $3n+3 = 3(n+1)$. Поэтому оно заведомо больше чем $3(n+1)$ – т.е. больше своего утроенного номера.

**12.** Малыш.

Чтобы обеспечить себе выигрыш, Малышу достаточно придерживаться такой стратегии. Если ему перед очередным ходом достанется «кучка» из одной конфеты, то он ее просто съест и выиграет. Если в куче будет $N > 1$ конфет, то ему надо разделить ее на две: из одной конфеты и из $N-1$ конфет. (Перед первым ходом у него как раз такая ситуация.) Действуя таким образом, Малыш будет вынуждать Карлсона каждый раз брать только одну конфету: если Карлсон пожадничает и съест большую кучу, то Малыш спокойно съест оставшуюся конфету и выиграет. Но и при таком (мучительном для Карлсона) развитии событий в конце концов Малыш выиграет: когда ему достанется кучка из двух конфет, он поделит ее пополам, Карлсон съест одну из двух конфет, а Малыш возьмет последнюю.

**13.** Найдутся.

Примеров тут можно придумать сколько угодно. Вот как можно получить некоторые из них. Пусть $\varepsilon$ – маленькое положительное число и $A = B = 1000000 + \varepsilon$, $C = 2000000$. Тогда $A + B - C = 2\varepsilon$ и $B + C - A = C + A - B = 2000000$. Значит,

$$(A+B-C)(B+C-A)(C+A-B) = \\ = 2\varepsilon \cdot 2000000 \cdot 2000000 = 8\varepsilon \cdot 10^{12}.$$

Чтобы это число было меньше одной миллионной, т.е. $10^{-6}$, достаточно взять $\varepsilon$ меньше чем $\frac{1}{8}\cdot 10^{-18}$. Например, подойдет $\varepsilon = 10^{-19}$.

**14.** $90^\circ$.

По основному свойству перпендикуляра, опущенного из точки на данную прямую, он короче любой наклонной, проведенной через эту точку к этой же прямой. Поэтому длина любой диагонали не может быть меньше, чем сумма длин перпендикуляров, опущенных из ее концов на вторую диагональ. Значит, сумма диагоналей не меньше суммы длин всех четырех перпендикуляров. Из условия же следует, что сумма диагоналей не больше суммы длин перпендикуляров. Получается, что описанные выше неравенства должны обращаться в равенства. А это означает, что диагонали четырехугольника перпендикулярны. Более того, из этого вытекает, что диагонали равны: длина каждой из них равна сумме длин опущенных на вторую диагональ перпендикуляров, т.е. длина каждой диагонали не больше длины другой диагонали. В итоге получаем, что четырехугольник, образованный серединами сторон исходного четырехугольника, – это квадрат, и искомый угол равен $90^\circ$.

**15.** а) Не может.

Пусть на доске как-то расставлены фишки. Будем рассматривать фигуру Ф, которую образуют все поля, занятые фишками (она вполне может состоять из нескольких частей). Первоначально Ф состоит из 10 полей, поэтому ее периметр не больше $6 \times 10 = 60$ (мы приняли сторону одного поля доски за единицу). Боря может ставить новые фишки только на те поля, у которых заняты не меньше трех соседей, т.е. не менее трех из шести сторон этого поля уже входят в границу Ф. Значит, каждое новое поле «добавит» к периметру Ф не больше, чем «отнимет» от него. Тем самым, после каждого Бориного хода периметр Ф не увеличивается. Но периметр всей доски равен 66, поэтому Боря не сможет заставить все свободные поля своими фишками.

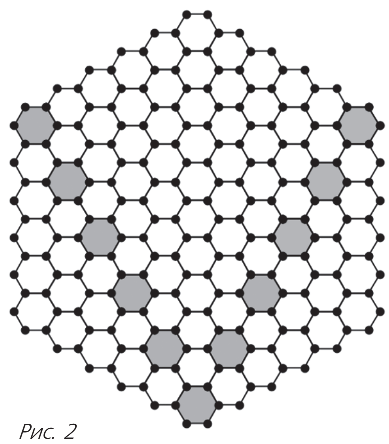


*Рис. 2*

б) Может.

На рисунке 2 показан один из способов расставить на доске 11 фишек, чтобы Боря смог заполнить оставшиеся поля своими фишками.

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

### Вопросы и задачи

**1.** Сталь расширяется при нагревании и сжимается при охлаждении в большей степени, чем дерево.

**2.** Этот материал должен иметь такой же коэффициент линейного расширения, как и стекло.

**3.** Да, нарушится. Нагретое плечо коромысла перетянет.

**4.** Медная часть – внизу.

**5.** Конвекционные течения в жидкости отсутствовали бы, и нижние слои жидкости имели бы значительно более высокую температуру, чем верхние.

**6.** При нагреве воды в правом сосуде она расширяется и занимает больший объем (в предположении, что начальная температура выше точки максимальной плотности). Однако из-за формы сосуда уменьшение плотности не компенсируется увеличением высоты ее столба. Поэтому давление на дно правого сосуда уменьшится, и вода по трубке будет перетекать из левого сосуда в правый. При нагреве воды в левом сосуде результат будет тем же – вода потечет по трубке вправо.

**7.** Высота столбика жидкости не зависела бы от температуры.

**8.** Можно. Для этого необходимо, чтобы ртуть в капилляре термометра находилась под высоким давлением (до 70 атм), что приведет к повышению точки ее кипения до нужного значения. Для достижения высокого давления капилляр заполняют газом, а его толстые стенки изготавливают из тугоплавкого кварца.

**9.** Во всех случаях уровни ртути останутся прежними.

**10.** Коэффициент объемного расширения жидкостей заметно зависит от рода вещества, тогда как все газы имеют один и тот же коэффициент объемного расширения.

**11.** Давление насыщенного пара воды при нагревании меняется иначе, чем давление газа.

**12.** В вольфрамовом волоске ток при включении значительно больше, чем в установившемся режиме, а в угольном – наоборот.

**13.** В первом случае ток через лампочку *2* начинает идти после того, как нить лампы *1* накалилась и ее сопротивление стало значительным. Во втором же случае ток через лампочку *2* начинает идти сразу после включения в сеть, т.е. когда нить лампы *1* еще не нагрелась и ее сопротивление мало, поэтому лампочка *2* перегорает.

**14.** Амперметр покажет увеличение тока.

**15.** Увеличивается концентрация свободных носителей заряда в полупроводнике.

**16.** На 25%.

**17.** Полупроводниковые термоэлементы имеют бóльшую чувствительность, больший КПД и меньшие размеры.

**18.** Холодные звезды в основном излучают в красной и инфракрасной частях спектра, что и определяет их цвет. Горячие звезды дают заметное излучение во всем оптическом диапазоне, которое создает ощущение белого цвета.

### Микроопыт

При кратковременном опускании термометра в горячую воду его стеклянный кончик расширится быстрее, чем заключенная в нем ртуть.

## ВОТ ЧТО-ТО С ГОРОЧКИ СПУСТИЛОСЬ...

**1.** $s = \dfrac{2v_0^2 \sin(\alpha - \beta)\cos\alpha}{g\cos^2\beta} = 30\text{ м}$.

**2.** $v = \sqrt{2gl(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)} = 4$ м/с.

**3.** $a_{\text{кл}} = g\dfrac{m_2\sin\alpha\cos\alpha}{m_2\sin^2\alpha + m_1}$, $a_{\text{бр отн}} = g\dfrac{(m_1+m_2)\sin\alpha}{m_2\sin^2\alpha + m_1}$, время спуска бруска найдем из уравнения $\dfrac{h}{\sin\alpha} = \dfrac{a_{\text{бр отн}}t^2}{2}$.

**4.** $F = mg\sqrt{\mu^2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = 20$ Н.

**5.** $F_{\text{н}} = \dfrac{m_2F}{m_1+m_2} = 20$ Н.

**6.** $k = \sqrt{\dfrac{(\operatorname{tg}\alpha + \mu)(1+\mu\operatorname{tg}\alpha)}{(\operatorname{tg}\alpha - \mu)(1-\mu\operatorname{tg}\alpha)}} = 7$.

**7.** $I = \dfrac{mg\operatorname{tg}\alpha}{Bl} = 8$ А.

**8.** $I = \dfrac{m}{L}\dfrac{a+g\sin\alpha}{B\cos\alpha} = 4$ А.

**9.** $v = \dfrac{mgR\sin\alpha}{B^2l^2} = 3\text{ м/с}$.

**10.** $t = \dfrac{\pi}{3}\sqrt{\dfrac{l}{g\sin\alpha}} = 314$ мс.

## XXI МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ МАРАФОН»

### ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ ПО ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ НАУКАМ

*Письменный индивидуальный тур*

### МАТЕМАТИКА

**1.** 78329.

Пусть искомое число равно $100x + 29$ ($x$ – целое), $S(x)$ – сумма цифр числа $x$. Из условия имеем, что $S(x) + 2 + 9 = 29$, откуда получим, что $S(x) = 18$, значит, $x$ делится на 9. По условию, $100x + 29 = 29k$, т.е. $100x = 29(k-1)$. Это значит, что $x$ делится на 29.

Итак, $x$ делится на $9\cdot 29 = 261$. Перебирая числа, кратные 261, найдем, что наименьшее удовлетворяющее условию число $x$ равно $261\cdot 3 = 783$.

**2.** $20°$.

Центр вписанной в равнобедренный треугольник $BCD$ окружности лежит на его высоте $BM$, опущенной из вершины $B$. Треугольник $AED$ равнобедренный, так как его сторона $ED$ равна отрезку $DM$ (это касательные к окружности, проведенные из точки $D$), который, по условию, равен отрезку $AD$. При этом $\angle BDC = 40°$ – внешний угол равнобедренного треугольника $ADE$, он равен сумме двух его равных внутренних углов, среди которых и искомый угол.

**3.** Нельзя.

Раскрасим доску в два цвета полосами по горизонтали, начиная с черной верхней, чередуя цвета. Тогда станет ясно, что «перегнать» квадрат в два верхних угла не удастся: в исходном квадрате одна черная полоса и две белых, а в обоих нижних квадратах – наоборот, в то время как при любом прыжке цвет полосы, на которой находится фишка, не меняется. Чтобы понять, что и в правый нижний квадрат «перегнать» тоже не удастся, достаточно заметить, что можно перекрасить доску, чередуя цвета по вертикали.

**4.** (1; 1).

Сделаем замену переменных: пусть

$$x + y = u,\ x + 1 = v,\ y + 1 = w.$$

Сложив почленно эти равенства, получаем $x + y + 1 = \dfrac{u+v+w}{2}$, откуда находим, что

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{-u+v+w}{2}, \\ x = \dfrac{u+v-w}{2}, \\ y = \dfrac{u-v+w}{2}. \end{cases}$$

Подставив эти выражения в данное уравнение, приходим к равенству

$$\frac{-u+v+w}{2u} + \frac{u-v+w}{2v} + \frac{u+v-w}{2w} = \frac{3}{2},$$

которое приводится к виду

$$\left(\frac{u}{v} + \frac{v}{u}\right) + \left(\frac{u}{w} + \frac{w}{u}\right) + \left(\frac{v}{w} + \frac{w}{v}\right) = 6.$$

В каждой скобке левой части этого равенства стоит сумма двух положительных взаимно обратных величин. Но при $a > 0$, как известно, $a + \dfrac{1}{a} \ge 2$, причем равенство наступает, лишь когда $a = 1$. Поэтому левая часть равенства не меньше правой, откуда получаем, что в каждой скобке первое слагаемое равно второму. В итоге имеем, что $u = v = w$, откуда $x = y = 1$.

**5.** $c\sin\frac{\gamma}{2}$.

Поскольку $\angle BKA = \angle ALB = 90°$, точки $A$, $B$, $K$ и $L$ лежат на одной окружности с диаметром $AB = c$ и центром $O$ – в середине стороны $AB$. Заметим, что $\angle ABK = 90° - \frac{\angle A}{2}$ (из прямоугольного треугольника $ABK$, учитывая что $AK$ – биссектриса угла $A$ исходного треугольника). Аналогично получим, что $\angle BAL = 90° - \frac{\angle B}{2}$. Поэтому (треугольники $BOK$ и $AOK$ – равнобедренные, так как отрезки $OA$, $OB$, $OK$ и $OL$ – радиусы окружности) $\angle BOK = 180° - 2\angle ABK = \angle A$, $\angle AOL = \angle B$, значит, $\angle KOL = 180° - \angle A - \angle B = \gamma$. Теперь из равнобедренного треугольника $KOL$ получаем

$$KL = c\sin\frac{\gamma}{2}.$$

**6.** $(-1;0)$; $(1;0)$; $(-4;3)$; $(4;3)$; $(-4;5)$; $(4;5)$.

Заметим, что между точками числовой оси $(y-1)^2$, $y^2$ и $(y+1)^2$ нет квадратов других целых чисел – это квадраты трех последовательных чисел. Поэтому число $x^2$ не может находиться внутри отрезка числовой оси от $(y-1)^2$ до $(y+1)^2$, следовательно, имеет место неравенство

$$\left|x^2 - y^2\right| \geq y^2 - (y-1)^2 = 2y - 1.$$

Значит, вместо данного уравнения можно написать следующее неравенство относительно $y$:

$$(2y-1)^2 \leq 16y + 1 \Leftrightarrow y(y-5) \leq 0.$$

Целочисленные решения последнего неравенства – числа 0, 1, 2, 3, 4 и 5. Подставляем их по очереди в исходное уравнение и ищем соответствующие целые значения $x$.

Если $y = 0$, из уравнения находим, что $x = \pm 1$. При $y = 1$ получаем, что квадрат целого числа равен 17, что невозможно. Аналогично не дают решений $y = 2$ и $y = 4$. При $y = 3$ имеем $\left(x^2 - 9\right)^2 = 49$, откуда

$$x^2 - 9 = \pm 7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 16, \\ x^2 = 2. \end{array}\right.$$

Целые решения получим только из первого уравнения последней системы.

Аналогично рассматриваем случай $y = 5$.

**7.** а) 3, 4; б) 3, 4, 12; в) 3, 4, 12, 84; г) 3, 4, 12, 84, … …, $a_n = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2 - 1}{2}$.

а) Пример: 3, 4. б) Получим пример с помощью п. а). Попытаемся продолжить выписанный там ряд из двух чисел: 3, 4, $x$, причем надо, чтобы выполнялось равенство $3^2 + 4^2 + x^2 = y^2$, т.е. $25 = y^2 - x^2$. Подберем числа $x$ и $y$. Должно выполняться равенство $25 = (y-x)(y+x)$. Положим первый множитель равным 1, тогда второй должен равняться 25. Итак,

$$\begin{cases} y - x = 1, \\ y + x = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12, \\ y = 13. \end{cases}$$

Искомая последовательность: 3, 4, 12.

в) Найдем последовательность с помощью примера к п. б), т.е. последовательность 3, 4, 12, $x$ такую, что $3^2 + 4^2 + 12^2 + x^2 = y^2$, т.е. $169 = (y-x)(y+x)$. Имеем (аналогично п. б))

$$\begin{cases} 1 = y - x, \\ 169 = y + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 84, \\ y = 85. \end{cases}$$

Искомая последовательность: 3, 4, 12, 84.

г) Строим последовательность $a_1$, $a_2$, …, $a_n$, исходя из предположения, что последовательность $a_1$, $a_2$, …, $a_{n-1}$ уже построена, т.е. что для всех значений $k$ от 1 до $(n-1)$ включительно сумма $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2$ является полным квадратом.[1] Аналогично пп. б) и в), имеем, что $a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2 + a_n^2 = y^2$, т.е. $z^2 + a_n^2 = y^2$, где через $z^2$ обозначена сумма квадратов первых $(n-1)$ членов последовательности (по условию, она есть полный квадрат). Получаем, как и в предыдущих пунктах решения,

$$z^2 = (y - a_n)(y + a_n).$$

Аналогично предыдущим пунктам, решаем систему уравнений

$$\begin{cases} y - a_n = 1, \\ y + a_n = z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \frac{z^2 - 1}{2}, \\ y = \frac{z^2 + 1}{2}. \end{cases}$$

Заметим, что по нашему построению первый член последовательности – нечетное число, а все остальные – четные: каждый раз мы получаем нечетную сумму квадратов, значит, добавляем четное число; поэтому правые части уравнений последней системы – целые числа.

## ФИЗИКА

**1.** $F = \frac{m\left(v^2 - gL\sin\theta\right)}{L}$; $\theta_{\text{пред}} = \arcsin\frac{v^2}{gL}$.

**2.** $t = \pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$.

**3.** $h_1 = \frac{2Q}{5mg} = 0{,}4$ м, $h_2 = H\left(\sqrt{1 + \frac{Q}{2mgH}} - 1\right) = 0{,}2$ м.

**4.** $x_{\text{л}} = l\frac{n(T_1 - T_0)}{(n+1)(T_1 + nT_0)} = 0{,}112$ м, $x_{\text{п}} = \frac{x_{\text{л}}}{n} = 0{,}012$ м.

**5.** $h = \sqrt{R^2 + \frac{L^2}{16}} = 13$ см.

**6.** $n = \frac{2n_{\text{в}}}{k + 1 - (k-1)n_{\text{в}}} = 2$.

**7.** $l_{\min} = \frac{2}{3}L = 30$ см.

*Устный командный тур*

## МАТЕМАТИКА

**1.** $30°$.

Треугольник $AMD$ – равнобедренный, так как $MC$ – его биссектриса и медиана; $MB$ – биссектриса угла $AMC$, поэтому $\frac{MC}{BC} = \frac{AC}{AB}$, т.е. $\frac{MC}{AC} = \frac{1}{2}$; но это значит, что

$$\angle AMB = \angle BMC = \angle CMD = \angle DME = 30°.$$

**2.** Нет.

Пусть (для определенности) $a > 0$. По условию, квадратное уравнение $f(x) = x$ не имеет корней. Это значит, что $f(x) > x$ при любом $x$. Но тогда $f(f(x)) > f(x) > x$. Если $a < 0$, рассуждения аналогичны.

**3.** Всегда.

*Указание.* Как бы мы ни разбивали множество чисел 1, 2, … …, 200 на 50 групп, найдется группа, в которую попадут по крайней мере три числа из {100, 101, …, 201}, состоящего из 101 числа. Но любые три числа из этого множества – длины сторон некоторого треугольника.

[1] Фактически мы доказываем существование искомой последовательности по индукции, используя в качестве базы индукции пп. а)–в).

**4.** Точка $M$ – основание высоты треугольника, опущенной на гипотенузу.

**5.** Одновременно запускаем трех- и пятиминутные часы. Через три минуты переворачиваем трехминутные часы, а в момент окончания работы пятиминутных часов начинаем варить зелье, затем через 1 минуту переворачиваем трехминутные часы. Через 3 минуты зелье готово.

**6.** а) Нет; б) нет.

Если число оканчивается цифрами 75, то оно дает остаток 3 при делении на 4, а если цифрами 421, то остаток числа при делении на 8 равен 5. В обоих случаях такое число не может быть полным квадратом.

**7.** $88\pi \approx 264$.

*Указание.* Сделайте чертеж.

**8.** Делится.

Пусть $x = 2^{15}$. Тогда

$$2^{62}+1 = 4x^4+1 = 4x^4+4x^2+1-4x^2 = \left(2x^2+1\right)^2-4x^2 = \left(2x^2+2x+1\right)\left(2x^2-2x+1\right),$$

но $2x^2+2x+1 = 2^{31}+2^{16}+1$.

**9.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

*Указание.* Пусть $r$ – радиус окружности, вписанной в треугольник $ABC$. Точки $A'$, $B'$, $C'$ и $A$ лежат на окружности с центром $I$ и радиусом $2r$. Поскольку $AI = 2r$, а расстояние от точки $I$ до стороны $AB$ равно $r$, то $\sin\dfrac{\angle A}{2} = \dfrac{1}{2}$, т.е. $\angle A = 60°$.

**10.** Нельзя.

*Указание.* Занумеруем монеты последовательно числами 1, 2, 3, …, 10 и рассмотрим монеты с нечетными номерами – их ровно 5. При каждой описанной в условии операции переворачиваются ровно 2 «нечетные» монеты, и поэтому среди них четность числа монет с орлами вверх не меняется, т.е. количество орлов среди таких монет нечетно и потому не равно 0.

## ФИЗИКА

**1.** $R = \dfrac{v^2}{g} \approx 27{,}8$ м.

**2.** $v = \dfrac{l}{2\Delta t} = 4$ км/ч.

**3.** В центре квадрата через время $t = \dfrac{a}{v}$.

**4.** Скорость увеличивается; потенциальная энергия тяготения уменьшается.

**5.** В первом сосуде давление не изменится, во втором сосуде уменьшится, в третьем увеличится.

**6.** Весы останутся в равновесии.

**7.** $v_{\min} = \sqrt{2aL}$.

**8.** Около одного литра.

**9.** Примерно 2%.

**10.** $v \approx 1200$ м/с.

### *История научных идей и открытий*

## МАТЕМАТИКА

**1.** Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716), один из создателей математического анализа, великий мыслитель и философ.

**2.** Окружность с диаметром $AB$.

Построим окружность с диаметром $AB$. Пусть $M$ – произвольная точка этой окружности, кроме точек $A$ и $B$. Тогда угол $AMB$ – прямой, $MM'$ – высота прямоугольного треугольника $ABM$, опущенная на гипотенузу, $AM'$ и $M'B$ – проекции катетов на гипотенузу. По известной теореме,

$$AM' \cdot M'B = MM'^2.$$

Таким образом, все указанные точки построенной окружности удовлетворяют условию задачи.

Пусть теперь точка $M$ не лежит на построенной окружности. Чтобы проекция этой точки на прямую $AB$ попала на отрезок $AB$, требуется, чтобы точка лежала внутри полосы, образованной прямыми, перпендикулярными отрезку $AB$, проходящими через точки $A$ и $B$. Пусть так и есть и пусть, кроме того, прямая $MM'$ пересекает окружность в точке $P$. Тогда для отрезка $PM'$ выполнено приведенное равенство, поэтому оно не может выполняться ни в случае, когда точка $M$ вне окружности (тогда $PM' < MM'$), ни когда она внутри окружности (тогда $PM' > MM'$). Значит, вне построенной окружности точек с указанным в условии свойством нет.

**3.** $(1;1)$, $(2;3)$.

Перепишем данное уравнение в виде

$$3^x - 1 = 2^y. \qquad (*)$$

Если $x$ нечетно, то при $x \ge 1$ число $3^x$ при делении на 4 имеет остаток 3. Поэтому $3^x - 1$ делится на 2 и не делится на 4. Равенство ($*$) при $x > 1$ невозможно, так как тогда его левая часть больше 8, т.е. $y > 3$, $2^y$ делится на 4, но левая часть на 4 не делится. Если же $x = 1$, то и $y = 1$.

При четном $x = 2k$ из равенства ($*$) следует, что

$$\left(3^k-1\right)\left(3^k+1\right) = 2^y,$$

а сомножители в левой части – степени двойки. Но разность двух степеней двойки равна двум лишь для чисел 2 и 4. Поэтому $3^k + 1 = 4$, т.е. $k = 1$. Отсюда $x = 2$, а $y = 3$.

**4.** Это расстояние равно $|x_a - x_b| + |y_a - y_b|$. По определению, новое расстояние равно $\left\|\overline{OA} - \overline{OB}\right\|$. Отложим вектор $\overline{OM} = \vec{m} = \overline{OA} - \overline{OB} = \left(x_b - x_a;\, y_b - y_a\right)$ от начала координат и найдем норму вектора $\overline{OM}$. Пусть $\left(x_m; y_m\right)$ – координаты точки $M$, а прямая $OM$ пересекает границу квадрата в точке $M'(x;y)$. Из определения нормы и подобия соответствующих треугольников следует, что

$$\left\|\overline{OM}\right\| = \frac{OM}{OM'} = \frac{|x_m|}{|x|} = \frac{|y_m|}{|y|},$$

т.е.

$$|x_m| = \left\|\overline{OM}\right\| \cdot |x|, \quad |y_m| = \left\|\overline{OM}\right\| \cdot |y|.$$

Сложив последние равенства, имеем

$$|x_m| + |y_m| = \left\|\overline{OM}\right\|\left(|x|+|y|\right) = \left\|\overline{OM}\right\|.$$

Поэтому расстояние $AB$ в новой метрике равно

$$|x_a - x_b| + |y_a - y_b|.$$

**5.** Пусть дана арифметическая прогрессия с первым членом $p$ и разностью $d$, состоящая из 15 простых чисел:

$$p,\ p+d,\ p+2d,\ p+3d,\ p+4d,\ \ldots,\ p+13d,\ p+14d. \quad (*)$$

Первый член прогрессии, простое число $p$, не должен делиться ни на одно из простых чисел

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13, \qquad (**)$$

иначе или третий, или четвертый, или шестой, или восьмой, или двенадцатый, или четырнадцатый член прогрессии будет делиться на одно из этих чисел соответственно и не будет простым числом. Итак, $p$ – простое число, не меньшее 17.

Покажем, что число $d$, наоборот, должно делиться на каждое из выписанных в ($**$) простых чисел, меньших 17.

Пусть $q$ – любое из чисел ($**$). Тогда среди чисел ($*$) $p$, $p+d$, …, $p+(q-1)d$ либо есть число, делящееся на $q$, что невозможно (это простые числа, большие $q$), либо среди них есть 2 числа с одинаковыми остатками при делении на $q$, но тогда разность этих чисел – число, кратное $d$ и меньшее чем $qd$ при простом $q$, – делится на $q$.

Итак, разность прогрессии $d$ делится на произведение всех чисел из $(**)$. Легко оценить это произведение: «все знают», что $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$, а произведение трех первых сомножителей равно 30. Поэтому $d \geq 30030 > 30000$.

### ФИЗИКА

**1.** а) Нильс Бор. б) В Дании. в) Принцип соответствия.

**2.** а) Вернер Гейзенберг. б) В Германии. в) Принцип неопределенности. Он заключается в том, что существуют пары физических величин, одновременное точное задание значений которых принципиально невозможно.

**3.** а) Архимед. б) Сиракузы в Сицилии. в) Эратосфен.

**4.** а) Бозон Хиггса. б) ЦЕРН, Швейцария, Большой адронный коллайдер.

**5.** Протвино (Московской обл.), Институт физики высоких энергий.

## I МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 5–8 КЛАССОВ

*Письменный индивидуальный тур*

### 5–6 классы

**1.** 60. **2.** 31 год. **3.** 60 м. **4.** 45.

**5.** 3. **6.** $\frac{1}{2}$ и $-1$.

### 7–8 классы

**1.** $-118$. **2.** 7744. **3.** 17.

**4.** $1005^2 = 1010025$. **5.** 4 ч.

**6.** Разобьем ковер на 16 одинаковых квадратов со стороной 1 м. Поскольку брызг всего 15, внутри хотя бы одного из этих квадратов брызг не будет. Из него и можно вырезать нужный чистый квадрат.

**7.** 301.

*Устный командный тур*

### 5–6 классы

**1.** 156. **2.** 51 дм$^2$ или 56 дм$^2$.

**3.** 5. **4.** 500 тонн. **5.** Одинаково.

**6.** *Указание:* $n^3 + 2n = n^3 - n + 3n = n(n-1)(n+1) + 3n$.

**7.** Верно.

### 7–8 классы

**1.** Делится. **2.** Сможет. **3.** 284 и 196.

**4.** 45. **5.** 48. **6.** 100 м.

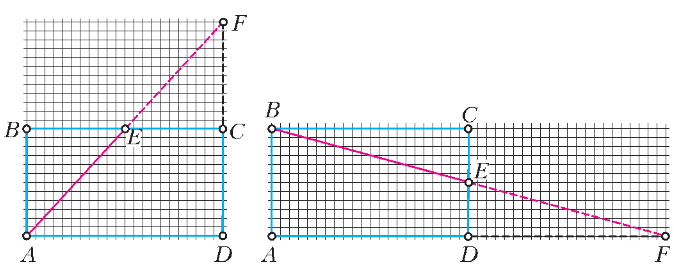



*Рис. 3*

**7.** Наименьшее число частей – это два; достаточен всего один разрез (рис.3).

**8.** а) Не могут; б) могут. **9.** Можно.

## РЕГИОНАЛЬНАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКЕ

**1.** $\tau = \frac{\pi l \sqrt{l}}{4\sqrt{GM}} \approx 1{,}35 \cdot 10^{17}$ с $\approx 4{,}3$ млрд лет (учет начальной скорости уменьшает искомое время до 3 млрд лет).

**2.** $H = h + L + \frac{\left(\frac{L}{\Delta t} - \frac{g\Delta t}{2}\right)^2}{2g} \approx 15{,}7$ м.

**3.** $I = \frac{7 + 3\sqrt{3}}{24} Md^2 \approx \frac{Md^2}{2}$.

**4.** Силы упругости, растягивающие оболочку сосиски во взаимно перпендикулярных направлениях – вдоль и поперек, отличаются приблизительно в 2 раза.

**5.** 16.

**6.** $\Delta\varphi = \frac{aqR}{2\varepsilon_0 \varepsilon}$, где $\varepsilon_0$ – электрическая постоянная, а $\varepsilon$ – диэлектрическая проницаемость пчелиного роя; $N = 2\pi R^2 a$.

**7.** $B = \sqrt{\frac{6}{5}} \frac{\mu_0}{\pi} \frac{I}{a}$, где $\mu_0$ – магнитная постоянная, $I$ – сила тока, $a$ – сторона «зуба» короны; магнитное поле возросло бы в $\frac{\pi\sqrt{5}}{6} \approx 1{,}17$ раза.

**8.** Приблизительно в 200 раз.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.В.Сумнина, В.М.Хлебникова

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Л.В.Калиничева, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: (495) 930-56-48

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь

www.Pareto-print.ru

# МемориаЛ АЛЕХИНА

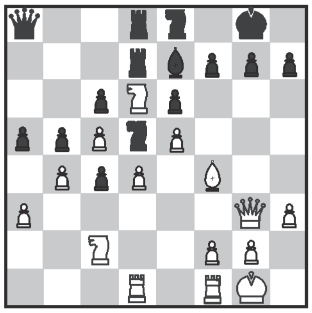
В мае этого года состоялся Мемориал Алехина – крупнейшее шахматное и культурное событие в мире. Он прошел в двух городах – первая половина (пять туров) в Париже, вторая (еще четыре тура) в Санкт-Петербурге. Сочетание этих городов не случайно. Родившись в Москве, Алехин в десять лет переехал в Петербург. Именно здесь он достиг видных успехов на ранней стадии своей шахматной карьеры – в 16 лет стал маэстро, а в 1914 году, почти 100 лет назад, занял третье место в крупном международном турнире вслед за тогдашним чемпионом мира Эм.Ласкером и его преемником, третьим чемпионом Х.-Р.Капабланкой (спустя тринадцать лет, выиграв у кубинца матч, Алехин сменил его на троне). Однако в 1921 году, женившись на швейцарке, Алехин переехал во Францию и спустя четыре года стал гражданином этой страны. В ней великий шахматист завоевал звание чемпиона мира, под флагом Франции выступал на шахматных олимпиадах. Неудивительно, что на могиле Алехина на кладбище Монпарнас начертано: «Шахматный гений России и Франции».

Другой важный момент – Мемориал Алехина продолжил традицию проведения соревнований в знаменитых музеях мира, на сей раз в парижском Лувре и петербургском Русском музее. Идея соединения шахмат с искусством (живописью) принадлежит известному предпринимателю и кандидату в мастера Андрею Филатову и впервые была реализована им год назад – матч на первенство мира Ананд–Гельфанд прошел в Третьяковской галерее. Заметим также, что на турниры, проводимые в музеях, приглашают множество школьников – с одной стороны, они следят за партиями корифеев, а с другой, знакомятся с полотнами великих художников.

В турнире участвовали десять супергроссмейстеров из 7 стран. Играли 14-й и 15-й чемпионы мира: действующий Виши Ананд и его предшественник Владимир Крамник, а также вице-чемпион Борис Гельфанд. Таким образом, два опытных «музейных работника», Ананд и Гельфанд, чувствовали себя среди картин в знакомой обстановке. Еще один восьмисотник (т.е. его рейтинг превышает 2800), помимо Крамника, принявший участие в турнире, – Левон Аронян. Петербург представляли двое: обладатель Кубка мира Петр Свидлер и чемпион мира в составе сборной России Никита Витюгов. На Мемориал были приглашены и два ведущих гроссмейстера Франции: Лоран Фрессине и Максим Вашье-Лаграв. И еще два участника: Майкл Адамс (Англия) и Дин Лижэнь (Китай).

Турнир начался с сенсации – в первом же туре проиграли два фаворита, Ананд и Аронян, первый Адамсу, второй Дин Лижэню.

**Дин Лижэнь–Л.Аронян**



Занятная позиция. Пешечные цепи переплелись между собой, доску покинуло всего по одной фигуре. Перевес на стороне белых – их конь проник глубоко в тыл врага.

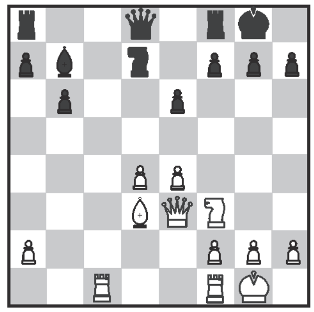
**28. ♘e3 ♘c3 29. ♖de1 ♗:d6 30. ed ♘e4 31. ♕h4 ♘d2 32. ♘d5!** Китайский гроссмейстер опасался Ароняна; кроме того, его вполне устраивала ничья, которой он собирался достичь, жертвуя качество. **32... ♘:f1 33. ♘b6 ♕a7 34. ♖:f1 ♘f6 35. ♗e5! ♘d5 36. ♘:d5 ed. 37. ♗:g7!** После партии Дин Лижэнь признался, что именно таким образом собирался завершить партию вечным шахом. **37...♔:g7 38. ♕g5+ ♔f8 39. ♕f6 ♔g8 40. ♕g5+ ♔f8 41. ♕f6 ♔g8.** Но тут он обнаружил, что, хотя у него отсутствует ладья, черный король попал в матовую сеть. **42. ♖e1! ab.** Или 42...h6 43. ♖e3 ♔ph7 44. ♖e7! **43. ♖e5!** Но не 43. ♖e3 ♕:a3! и больше ничьей у белых нет. **43...h6 44. ♖h5 ♕:a3 45. ♕:h6 f6 46. ♕:f6. Черные сдались.** Партия получила приз за самую красивую атаку.

А уже в следующем туре Аронян реабилитировался и обыграл экс-чемпиона мира.

**Л.Аронян–В.Крамник**

**Защита Тарраша**

**14... ♖c8 15. e5 ♗:f3 16. ♕:f3 ♕h4 17. ♕e3 ♖fd8 18. f4 ♘f8 19. ♖:c8 ♖:c8 20. f5 ef 21. ♗:f5 ♖d8 22. ♖d1 ♘g6 23. ♗:g6 hg 24. d5 ♕c4 25. d6 ♕e6 26. ♕g3 b5 27. h3 a6 28. ♕e3 ♖d7 29. ♕c5 ♔h7?** Пешка d6 опасна, но, продолжая 29...f6! 30. ef gf 31. ♕c6 ♔g7, черные могли рассчитывать на ничью. **30. ♕d5! ♕e8 31. ♖c1 ♕d8 32. ♖c6 ♕g5 33. ♕d4 ♖d8 34. ♖c5 ♕g3 35. ♕f2 ♕:f2+ 36. ♔:f2 f6.** Наконец, подрыв осуществлен, но черный король слишком удалился от места событий.



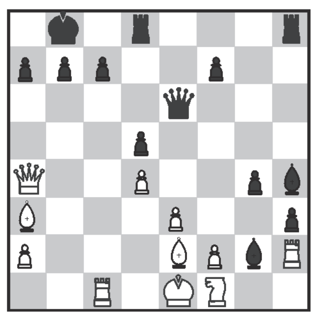
**37. ♖c6 fe 38. ♔e3 ♔g8 39. ♔e4 ♔f7 40. ♔d5! a5 41. ♖c5 b4 42. ♖:a5 ♔f6 43. ♖a7 ♖b8 44. ♔c6 b3 45. ab ♖:b3 46. ♖a8 ♖c3+ 47. ♔d7 e4 48. ♖f8+ ♔g5 49. ♔e7 e3 50. d7 e2 51. d8♕ e1♕+ 52. ♔d6+!** Интересная геометрия: белый король уходит от шаха с вертикали «е» и открывает дорогу ферзю по диагонали, мат неизбежен. **Черные сдались.**

Финал парижской части успешно сложился для французских гроссмейстеров: Лоран Фрессине разгромил Крамника, а Максим Вашье-Лаграв – Свидлера.

**В.Крамник–Л.Фрессине**

**Староиндийское начало**

**1. ♘f3 d5 2. g3 ♘c6 3. d4 ♗g4 4. ♘bd2 ♕d7 5. h3 ♗f5 6. c3 e5.** Обе стороны готовят пешечный штурм, но удачнее он оказывается для черных.**7. de 0–0–0 8. e3 ♘ge7 9. g4 ♗g6 10. b4 h5! 11. b5 hg 12. bc ♘:c6 13. e6 ♕:e6 14. ♘d4 ♘:d4 15. cd ♗e7 16. ♗g2 gh 17. ♗f3 ♗f5 18. ♕a4 ♔b8 19. ♗a3 ♗h4 20. ♘f1 g5 21. ♖h2 g4 22. ♗e2 ♗e4 23. ♖c1 ♗g2.** У белых лишняя фигура за три пешки, но ладья их закована в цепи, и им несдобровать.



**24. ♕a5 ♖c8 25. ♖c3 ♗:f2+! 26. ♔:f2 ♗:f1 27. ♔:f1 g3.** Черные пешки все сметают на своем пути. **28. ♗f3 gh 29. ♔e2 ♖hg8 30. ♖c5 a6 31. ♗h1 ♖g2+. Белые сдались**. Фрессине получил приз за партию в стиле Алехина.

Итоги турнира. **1–2. Аронян, Гельфанд** – 5,5 из девяти (Аронян впереди по числу побед); **3. Ананд** – 5; **4–8. Адамс, Вашье-Лаграв, Витюгов, Крамник, Фрессине** – 4,5; **9. Дин Лижэнь** – 3,5; **10. Свидлер** – 3.

*Е.Гик*

Индекс 90964

# Как растянуть мгновение ?

Можно ли определить скорость ветра с помощью фотокамеры? А скорость движущегося автомобиля?..

# Прогулки с физикой

(Продолжение – на с. 29 внутри журнала)